

分类号 _____
UDC _____

密级 _____
编号 _____

西北工业大学

博士后研究工作报告

捷联惯导系统动基座初始对准

及其它相关问题研究

严恭敏

工作完成日期 2006 年 11 月—2008 年 11 月

报告提交日期 2008 年 11 月

西北工业大学（陕西·西安）

2008 年 11 月

中文题名 捷联惯导系统动基座初始对准
及其它相关问题研究

英文题名 On SINS In-movement Initial Alignment
and Some Other Problems

博士后姓名 严恭敏

流动站（一级学科）名称 兵器科学与技术

专 业（二级学科）名称 武器系统与运用工程

研究工作起始时间 2006 年 11 月

研究工作期满时间 2008 年 11 月

单位名称 西北工业大学

报告提交日期 2008 年 11 月

摘 要

报告中除了对捷联惯导系统 (SINS-Strapdown Inertial Navigation System) 动基座初始对准进行重点分析和研究外, 还针对以下问题作了深入研究或探讨, 它们包括: 大失准角下的 SINS 初始对准技术、SINS 内杆臂效应分析与补偿、激光陀螺整周期采样对捷联惯导姿态解算的影响及其修正方法、经典圆锥误差补偿精度估计。

报告的主要研究内容介绍如下:

1、根据 SINS 的正常导航更新算法, 详细推导了逆向导航算法。在分析平台罗经初始对准原理基础上, 提出了捷联罗经动基座初始对准的原理并推导了适合于软件编程的具体算法。在导航计算机存储容量足够大并且计算能力足够强的条件下, 通过逆向导航算法将动基座初始对准与位置导航有机结合起来, 达到同时实现了初始对准和位置导航的目的。在运载体运动情况下, 还提出了一种适用于 SINS 动基座初始对准的新算法, 该算法以惯性空间为参考基准, 将初始对准姿态矩阵的实现分解为三部分, 其核心是通过惯导比力方程变形, 获得外界测速仪 (或 GPS) 辅助测量、加速度计输出和重力加速度之间的关系, 从中求解出两个特定惯性系之间的常值变换矩阵。

2、基于欧拉平台误差角的概念提出了大失准角误差条件下的 SINS 非线性初始对准误差模型, 该模型无法再用经典的加性噪声模型描述。为了降低滤波计算量, 在系统模型噪声和量测噪声均为复杂加性噪声并且量测方程是线性方程时, 推导了简化的 UKF (Unscented Kalman Filter) 滤波方法, 对静基座下 SINS 初始对准进行了仿真试验, 结果表明大失准角条件下的 SINS 误差模型和简化 UKF 滤波估计方法是有效的。

3、在实际捷联惯性测量组件 (SIMU-Strapdown Inertial Measurement Unit) 中, 三个加速度计本质上测量的是 SIMU 上三个不同点处的加速度, 如果把这些加速度当作来自于理想“点测量组件”的输出进行惯性导航解算, 会从原理上引起导航误差, 即内杆臂效应误差。假设 SIMU 中三个加速度计敏感轴互相垂直并且相交于一点, 在 SIMU 绕某个固定坐标轴作角振动的条件下, 分析了内杆臂效应的产生机理, 得出内杆臂效应引起导航速度误差的规律: 速度误差与角振动中心位置无关, 与加速度计敏感点至交点的杆臂长度成正比, 也与角振动频

率成正比。提出内杆臂效应补偿的方法是将加速度计敏感点处的加速度测量值折算至它们的敏感轴交点上。

4、抖动偏频激光陀螺捷联惯导系统（LSINS）中，三个激光陀螺之间机械抖动频率一般互不相同。当陀螺输出采用整周期锁存方式时，导航计算机定时采样系统采集到的三个陀螺信号，隐含着陀螺输出的不同步，在捷联惯导解算中将产生姿态解算的不可交换误差，在圆锥运动环境下误差更加严重。提出了在整周期采样电路上进行少许改动，就能做出有效改进的方法，并详细推导了线性外推修正的算法公式。研究结果有利于拓展整周期采样的应用范围。

5、在经典圆锥误差补偿系数和剩余误差估计公式推导过程中，特别在半锥角有限小、圆锥运动频率较低和选用多子样算法时，经典的剩余误差估计方法会出现严重偏差。在不能视半锥角为无限小量情况下，文中利用推导方法提出一种新的剩余误差估计的参考公式，即圆锥误差补偿极限精度公式。利用仿真方法验证了等效旋转矢量误差的周期项对圆锥常值漂移误差有影响。研究表明，在一定的半锥角和圆锥频率的工程应用环境下，当极限精度发挥作用时，提高圆锥误差补偿精度的唯一途径是缩短补偿周期，而不像经典的结论那样——即使补偿周期较大，通过提高子样数几乎能无限提高圆锥误差补偿精度。

关键词：

捷联惯导系统；罗经；动基座初始对准；UKF 滤波；内杆臂效应；
整周期采样；圆锥误差补偿

ABSTRACT

The main efforts done in this report are as follows:

1. Reverse navigation algorithms are deduced in detailed based on the classical SINS(strapdown inertial navigation system) updating algorithms. Also, the basic principles for stabilized gyrocompass initial alignment are analyzed in the platform inertial navigation system (PINS), then similar principles and initial alignment algorithms suitable for program are proposed for SINS. On the assumption of navigation computer having large memory and powerful computing ability, the connection between in-movement alignment and vehicle position determining is established by reverse navigation algorithm. On the moving base, a new initial alignment algorithm for SINS is also proposed. In this algorithm, two special inertial frames are defined and are selected as alignment references, then the calculation of initial alignment direction cosine matrix (DCM) is expanded into three parts, where the core part is the achievement of DCM between two inertial frames by SINS specific force equation and the relation between velocity log (or GPS), accelerometer measurement and gravity acceleration.

2. In chapter 3, misalignment angles between ideal navigation reference frame and the practical calculating one's are described as Euler platform error angles (EPEA). SINS nonlinear error model is deduced using EPEA in detailed to satisfy large initial misalignment angles, and the nonlinear error model shows that its state noises are no longer simple and additive as that in the classical models. On the assumption of additive but complex noises in both state and measurement processes and measurement model being linear, simplified UKF algorithm is presented. SINS initial alignment simulation tests under large EPEA are executed, and the results verify the proposed SINS error model and the simplified UKF algorithm..

3. In a practical strapdown inertial measurement unit (SIMU), the acceleration measurements by three accelerometers are actually from different points. If these acceleration data be directly used, they could cause the navigation error, i.e. inner lever arm effect velocity error (ILAEVR). The paper analyzed the mechanism of ILAEVE in detail, and some velocity error formulas were deduced by assuming that accelerometer's sense axes were perpendicular to each other and the three axes intersect at one point—a virtual measuring point. When SIMU vibrates by a fixed

axis, the velocity error is not relevant to the vibration position, but it is proportional to the length between accelerometer's sense point and the virtual measuring point, and is also proportional to SIMU vibrating frequency. The method of compensation for ILAEVE is to convert the accelerometer measurements to the virtual point of intersection.

4. In dithered laser gyro strapdown inertial navigation system(LSINS), the mechanical dither frequencies of three laser gyros are always different from each other. Using dithered laser gyro whole cycle sampling demodulation (WCSD) method, the angular data sampled by navigation computer timing sample system imply that the outputs of the three laser gyros are asynchronous, hence noncommutative error occurs in LSINS attitude updating algorithm. The error becomes even worse under coning motion environment. With some modification to the WCSD circuit, an effective innovation is introduced to the demodulation technique, and the linear extrapolation for gyro angle increment prediction is deduced in detailed. The study in this paper will help to improve the WCSD application for dithered laser gyro.

5. In the deducing of the classic coning compensation algorithm coefficients and their residual error estimation formulas, the classic error estimation formula could cause serious errors in the case of insufficient small coning half-angle amplitude, low coning frequency and multi-samples algorithm. So a new error estimation formula, i. e. accuracy limitation formula of coning compensation was deduced even if the coning angle is not infinitesimal. Moreover, simulation tests verify that the periodic components of equivalent rotation vector affect coning compensation errors. The studies reveal that if the accuracy limitation formula acts on coning compensation algorithm under a large attitude updating period, the approach of improving coning compensation accuracy is to shorten the equivalent rotation vector calculation period, while the classic means is just by increasing the number of samples.

Key words:

Strapdown Inertial Navigation System(SINS), Gyrocompass,
In-movement Initial Alignment, Unscented Kalman Filter(UKF),
Inner Lever Arm Effect, Whole Cycle Sampling Demodulation(WCSD),
Coning Error Compensation,

目 录

摘 要	I
ABSTRACT	III
第一章 绪 论	1
1.1 研究背景	1
1.2 主要研究内容	3
1.2.1 SINS动基座初始对准技术	3
1.2.2 大失准角下的SINS初始对准技术	4
1.2.3 SINS内杆臂效应分析与补偿	4
1.2.4 激光陀螺整周期采样对捷联惯导姿态解算的影响及其修正	5
1.2.5 经典圆锥误差补偿精度估计	5
第二章 逆向导航技术及其在快速捷联罗经初始对准中的应用	7
2.1 引言	7
2.2 逆向导航技术	8
2.2.1 逆向捷联惯导算法	8
2.2.2 逆向姿态跟踪算法	10
2.2.3 逆向航位推算算法	11
2.3 捷联罗经初始对准原理及其实现	12
2.3.1 平台罗经初始对准原理与误差分析	13
2.3.2 捷联罗经初始对准原理及算法	18
2.3.3 捷联罗经初始对准步骤	21
2.3.4 快速捷联罗经初始对准方法	23
2.3.5 快速捷联罗经初始对准试验	25
2.4 捷联罗经动基座初始对准与导航	26
2.4.1 捷联罗经动基座初始对准原理及算法	26
2.4.2 捷联罗经动基座初始对准步骤	28
2.4.3 动基座初始对准中的位置导航	35
2.4.4 车载动基座初始对准与导航试验	36
2.5 本章小结	37
附录：惯性器件斜坡性误差对初始对准精度的影响	38
第三章 一种新的动基座初始对准技术	42
3.1 引言	42
3.2 里程计辅助动基座初始对准	43
3.2.1 坐标系定义与解析式对准算法	44
3.2.2 里程计辅助动基座初始对准算法	45
3.2.3 车载里程计辅助初始对准试验	49
3.3 GPS辅助动基座初始对准	49
3.3.1 GPS辅助动基座初始对准算法	50

3.3.2 惯性视速度的数值积分方法及误差分析	51
3.3.3 车载GPS辅助动基座对准试验	54
3.4 晃动干扰基座初始对准	55
3.4.1 晃动干扰基座初始对准算法	55
3.4.2 晃动干扰基座初始对准试验	56
3.5 本章小结	59
第四章 大失准角下的SINS初始对准技术	60
4.1 引言	60
4.2 SINS非线性误差方程	61
4.2.1 经典SINS微分方程	61
4.2.2 欧拉平台误差角微分方程	62
4.2.3 SINS姿态误差方程	63
4.2.4 SINS速度误差方程	64
4.2.5 SINS位置误差方程	65
4.3 SINS误差模型的简化与准确性仿真	65
4.3.1 大方位失准角下的SINS误差模型	66
4.3.2 小失准角的SINS误差方程	66
4.3.3 阻尼SINS算法及其误差模型	67
4.3.4 SINS非线性误差模型准确性仿真	68
4.4 基于复杂加性噪声的UKF滤波	70
4.4.1 标准Kalman滤波	70
4.4.2 简化UKF滤波	72
4.5 大失准角下准静基座初始对准仿真	74
4.5.1 初始对准滤波模型	74
4.5.2 初始对准仿真	75
4.6 本章小结	77
附录：基于复杂加性噪声的简化UKF滤波	77
第五章 SINS内杆臂效应分析与补偿	83
5.1 引言	83
5.2 质点在圆弧形轨道上的运动分析	84
5.3 内杆臂效应误差分析	87
5.4 内杆臂效应的补偿方法	89
5.5 内杆臂效应试验	91
5.6 杆臂效应引起的划船运动误差探讨	94
5.7 本章小结	95
第六章 激光陀螺整周期采样的影响与修正	96
6.1 引言	96
6.2 整周期锁存和定时采样简介	97
6.3 整周期锁存误差仿真	98
6.3.1 圆锥运动描述	98
6.3.2 圆锥运动环境下整周期采样的角增量仿真	99

6.3.3 整周期采样对姿态解算的影响	100
6.4 整周期采样的修正	102
6.4.1 修正的基本原理	102
6.4.2 修正后的仿真效果	104
6.5 本章小结	106
第七章 经典圆锥误差补偿精度估计的再探讨	107
7.1 引言	107
7.2 经典圆锥运动的描述	108
7.3 圆锥误差补偿算法	109
7.4 传统剩余误差估计的局限性	112
7.4.1 半锥角 α 的影响	112
7.4.2 等效旋转矢量周期项误差的影响	114
7.5 本章小结	117
第八章 总 结	118
参考文献	121
攻读博士学位期间发表的论文	125
博士后在站期间发表的论文	126
博士后在站期间主持和参加的科研项目	127
博士后在站期间获得的奖励	127
个人简介	128
致 谢	129

第一章 绪论

1.1 研究背景

众所周知,初始对准是捷联惯导系统(SINS-Strapdown Inertial Navigation System)进行导航的前提,初始对准的好坏将直接影响到系统的导航精度。进行初始对准的方法多种多样,如静态直接计算姿态角法、多位置对准法和罗经对准法、SINS/GPS 组合对准法,传递对准法等等^[1-9]。动基座初始对准通常包含两个阶段:粗对准阶段和精对准阶段,在粗对准阶段或者依靠 SINS 的惯性传感器测量输出获取粗略的初始姿态矩阵,或者利用外界方位信息对 SINS 进行直接装订;精对准阶段在粗对准的基础上,一般以速度误差作为观测量,通过一定的算法估计粗对准的失准角,这些算法有卡尔曼滤波算法、扩展卡尔曼滤波(EKF)、模糊自适应滤波、遗传滤波算法、UKF(Unscented Kalman Filter)、粒子滤波等等算法,国内外学者进行了大量的研究^[10-14]。但是,无论上述精对准算法是适用于线性的还是非线性的情况,都必须假设在事先具备有一定精度的初始姿态信息的条件下才能实现,也就是说在这些初始对准方法中粗对准阶段是不可缺少的。如何使 SINS 在运动条件下,譬如载车在行驶中或舰船在机动航行时难以获得粗略初始姿态矩阵条件下,实现初始对准是一个非常值得研究的课题,该技术在军事应用中将极大增强武器发射平台的机动性能,提高自身生存能力。

目前,国内陆地战车普遍采用静态初始对准方式,对准时战车必需原地停止,最短对准时间也要 3~5min;舰船初始对准一般在航行之前的系泊状态下或匀速直航状态下进行,对准时间通常要几十分钟^[14,15]。近年来,国内有些单位研制了光纤捷联惯导系统试验样机,采用多位置寻北算法,在 1~2min 内可实现 1mil(mil-密位, $1\text{mil}=2\pi/6000\text{rad}$)的方位对准精度,但是载车必须保证良好的静止条件,若有阵风干扰或发动机待速等不良晃动干扰影响,对准结果可能误差很大。

动基座初始对准在军事应用中具有重要意义,但是,西方国家在惯性技术等众多技术敏感领域,其技术和产品都有严格的出口限制,深入开展动基座初始对准技术的研究有助于打破国外在该领域的高新技术封锁和垄断。如果具备动基座初始对准能力,在战时即使 GPS 等卫星信号不可完全依赖,战车在里程

计的辅助下或舰船在多普勒测速声纳的帮助下也可实现运动状态下的初始对准，这将有效增强武器发射平台的机动性能，赢得战机，提高自身生存能力。

法国在 SINS 动基座初始对准研究和应用方面走在了世界的前列，其代表产品有 iXSea 公司的 Phins 光纤捷联惯导系统和 Octans 光纤捷联罗经系统^[16-18]。作者曾在 Phins 上作过试验，即使 Phins 在初始对准过程中始终持续作大角度翻滚运动，它也能顺利进行初始对准，并且还具有相当高的精度。Octans III 型光纤捷联陀螺罗经在动态环境下，能在 3min 内完成初始对准，达到 $0.2^\circ \times \sec(L)$ 的精度。据 Octans 使用手册介绍^[18]，其寻北（对准）原理如下：由于舰船运动时的晃动角速率比地球自转高几个数量级，并且向心加速度相对于重力加速度而言大小不可忽视，因而常规对准方法不可用，Octans 选用惯性坐标系作为寻北计算的参考基准，陀螺测量运载体相对于惯性系的姿态角，加速度计输出的是运载体加速度和重力加速度之和，将加速度计输出在惯性系中投影，当滤除运载体加速度影响后，可“观测”到地球自转引起重力加速度 $\mathbf{g}$ 在惯性系中缓慢漂移， $\mathbf{g}$ 漂移在以地球自转轴为主轴的一个锥面内，如图 1-1 所示，最终可从 $\mathbf{g}$ 的运动图中确定出地理北向。另据国内某研究单位介绍，法国的 SIGMA30 激光陀螺定位定向系统曾在该单位演示过动基座初始对准试验，载车在行驶 3-5min 后可实现方位角 1mil 的对准精度。但是，遗憾的是未能在公开发表的文献资料中查阅到更多详细的技术细节。

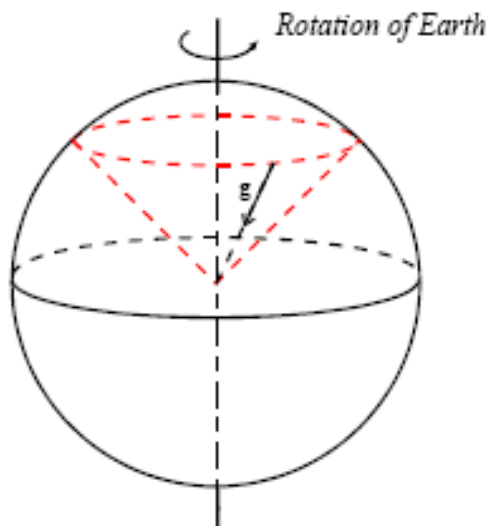


图 1-1 在惯性系中重力加速度矢量 $\mathbf{g}$ 的锥面运动图

近年来国内在研究动基座初始对准方面也取得了一定的成绩，如文献 [19, 20] 受 Phins 的启发，详细推导了舰船在系泊状态下的初始对准算法，思路

比较新颖，最近他们完成的转台摇摆初始对准试验结果也证明了该算法的有效性。

1.2 主要研究内容

1.2.1 SINS 动基座初始对准技术

经典平台惯导系统罗经初始对准过程通常可分为两步，先是水平调平，然后是方位对准。方位对准在水平调平的基础上进行，一般采样罗经方位对准方法。方位罗经对准利用的是罗经效应，也就是，在正确的平台跟踪当地地理坐标系的角速率控制指令下，如果平台存在方位轴向的偏差角，平台将产生绕东向轴的倾斜，该倾斜能由北向加速度计感测到，利用北向加速度计的输出并设计适当的控制规律，控制平台方位轴朝减小方位偏差方向转动，实现平台自动寻北。

本报告第二章在分析经典平台罗经初始对准原理的基础上，提出了捷联罗经初始对准原理，进一步的，在具备外界参考速度时，将其推广至动基座初始对准。经过研究指出，由测速仪辅助的罗经水平对准可以求得准确而平滑的运载载体速度信息，这为第三章里程计辅助初始对准问题的解决提供了方便和奠定了基础。通过引入逆向导航技术，大大缩短了通常意义下的罗经初始对准方法所需的对准时间。在运载载体运动情况下，借助于逆向导航算法，既能够完成初始对准又能够实现运载载体运动的位置导航，为 SINS 动基座初始对准提供了一个崭新的思路。

第三章介绍了以惯性坐标系作为参考基准进行运动基座初始对准的新方法，其基本原理是，将初始对准姿态矩阵 $C_b^n(t)$ 的实现分解成 $C_{i_0}^n(t)$ 、 $C_{i_{b0}}^{i_0}(t)$ 和 $C_b^{i_{b0}}(t)$ 三部分，即：

$$C_b^n(t) = C_{i_0}^n(t) C_{i_{b0}}^{i_0}(t) C_b^{i_{b0}}(t)$$

$C_{i_0}^n(t)$ 可由运载载体所处地理位置和初始对准时间确定；利用陀螺测量输出求解矩阵 $C_b^{i_{b0}}(t)$ ， $C_b^{i_{b0}}(t)$ 的更新求解过程隐含了对运载载体角运动的隔离；利用加速度计输出和重力加速度在两个特定惯性坐标系 i_{b0} 系和 i_0 系间的变换关系求取 $C_{i_{b0}}^{i_0}$ ，即通过惯导比力方程求取常值矩阵 $C_{i_{b0}}^{i_0}$ ，其基本思路是：若将比力方程

$$\dot{\mathbf{v}}^n(t) = \mathbf{f}_{sf}^n(t) + \mathbf{g}^n - [\boldsymbol{\omega}_{in}^n(t) + \boldsymbol{\omega}_{en}^n(t)] \times \mathbf{v}^n(t)$$

以不同形式进行等价变形，可以构造出不同的外界信息辅助的动基座初始对准方式，如测速仪测量速度辅助初始对准或 GPS 测量位置辅助初始对准等方式。该思路同 Octans 使用手册中所指出的动基座对准原则是一致的：借助于外界辅

助手段滤除运载体加速度的影响,便可从加速度计输出中提取到纯正的重力加速度信息,再在 g 运动图规律中计算出北向。自然而然,晃动干扰基座初始对准可以看成是动基座初始对准的特例,至此,前者的实现也就很容易了。

除了主要进行 SINS 动基座初始对准研究外,作者在博士后工作期间还针对以下几点感兴趣问题作了进一步的研究或探讨。

1.2.2 大失准角下的 SINS 初始对准技术

SINS 误差模型是研究其误差传播特性和进行多导航系统间信息融合的基础。经典的小失准角 SINS 误差模型是一组线性微分方程误差模型,认为三个失准角之间是与转动先后顺序无关的,即可交换的。在大失准角误差模型中,第四章摒弃了可交换性的做法,使用欧拉平台误差角来表示从理论导航坐标系到计算导航坐标系之间的三个失准角,提出了大失准角误差条件下的 SINS 非线性初始对准误差模型,在大方位失准角误差和小失准角误差条件下作了简化,简化结果比已有文献中的大方位失准角误差模型更加全面,而与经典小失准角误差模型完全相同。大失准角误差模型无法再用经典的加性噪声模型描述,为了降低滤波计算量,在系统模型噪声和量测噪声均为复杂加性噪声并且量测方程是线性方程时,推导了简化的 UKF 滤波方法,简化 UKF 滤波公式显示:除通过非线性状态方程使用 UT (Unscented Transformation) 变换进行状态及其方差预测外,其它滤波步骤与标准 Kalman 滤波完全相同。最后,对静基座下 SINS 初始对准进行了仿真试验,结果表明大失准角条件下的 SINS 误差模型和简化 UKF 滤波估计方法是有效的。

1.2.3 SINS 内杆臂效应分析与补偿

在实际捷联惯性测量组件 (SIMU-Strapdown Inertial Measurement Unit) 中,三个加速度计本质上测量的是 SIMU 上三个不同点处的加速度,如果把这些加速度当作来自于理想“点测量组件”的输出进行惯性导航解算,会从原理上引起导航误差,即内杆臂效应误差 (Inner Lever Arm Effect,在有些文献中称之为尺寸效应-Dimension Effect)。第五章假设 SIMU 中三个加速度计敏感轴互相垂直并且相交于一点,在 SIMU 绕某个固定坐标轴作角振动的条件下,分析了内杆臂效应的产生机理,得出内杆臂效应引起导航速度误差的规律:速度误差与角振动中心位置无关,与加速度计敏感点至交点的杆臂长度成正比,也与角振动频率成正比。在实际捷联惯导系统中,如果加速度计的内杆臂长度比较大,当运载体出现角运动,特别是方位急速转弯时,将可能引起严重的导航速度解

算误差。提出内杆臂效应补偿的方法是将加速度计敏感点处的加速度测量值折算至它们的敏感轴交点上。在激光捷联惯导系统的转台上手动快速转动导航试验中,验证了内杆臂效应的存在和影响,通过补偿后内杆臂速度误差明显减小了。

1.2.4 激光陀螺整周期采样对捷联惯导姿态解算的影响及其修正

目前,机械抖动偏频方法是减小激光陀螺闭锁区的一项重要技术,整周期采样能够消除机械抖动偏频的影响,是一种获得运载体真实角运动的简单而又实用的方法。但是,在采用抖动偏频激光陀螺搭建的 SINS 中,三个激光陀螺之间机械抖动频率一般互不相同。当陀螺输出采用整周期锁存方式时,导航计算机定时采样系统采集到的三个陀螺信号,隐含着陀螺输出的不同步,在捷联惯导解算中将产生姿态解算的不可交换误差,在圆锥运动环境下误差更加严重。第六章介绍了整周期采样时陀螺输出的不同步现象,在圆锥运动条件下对不同步问题进行仿真,仿真结果表明不同步是引起姿态解算误差的重要因素,不同步误差远远超过同步采样条件下的理想姿态解算误差。在整周期采样修正方面,提出了在激光陀螺整周期采样电路上进行少许改动,就能作出有效改进的方法,并详细推导了线性外推修正的算法公式。修正仿真结果表明,当姿态更新采用等效旋转矢量二子样算法时,利用线性+抛物线外推修正的效果非常显著,它能有效抑制整周期采样造成的姿态算法漂移误差,达到与理想采样的漂移误差非常接近的程度。第六章介绍的研究结果有利于拓展整周期采样的应用范围,提高实时 SINS 角速率和姿态角测量精度,还能够解决高频采样低通滤波后带来严重相位延迟的负面影响。

1.2.5 经典圆锥误差补偿精度估计

在经典圆锥误差补偿系数和剩余误差估计公式推导过程中,需假设圆锥运动的半锥角为小量,并以等效旋转矢量误差的非周期项最小为准则。可事实上,半锥角为小量的假设并不等价于无限小量,并且等效旋转矢量误差的周期项对圆锥常值漂移误差也会产生影响,因此,特别在半锥角有限小、圆锥运动频率较小和选用多子样算法时,经典的剩余误差估计方法会出现严重偏差。第七章在不能视半锥角为无限小量情况下,利用推导方法提出一种新的剩余误差估计的参考公式,即圆锥误差补偿极限精度公式。利用仿真方法验证了等效旋转矢量误差的周期项对圆锥常值漂移误差存在影响。研究表明,在一定的圆锥运动半锥角和圆锥频率的工程应用环境下,当极限精度发挥作用时,提高圆锥误差

补偿精度的唯一途径是缩短补偿周期，而不像经典的结论那样——即使补偿周期较大，通过提高子样数几乎能无限提高圆锥误差补偿精度。

第二章 逆向导航技术及其在快速捷联罗经 初始对准中的应用

2.1 引言

初始对准是惯导系统进入导航的前提，它的两个重要指标是精确性和快速性，但是在自对准中这两者之间往往是相互矛盾的。鉴于常规数据处理算法的局限性，一般将初始对准过程分为多个不同的阶段，例如，应用经典控制理论的罗经初始对准方法中的水平调平阶段和罗经方位对准阶段，或者应用现代控制最优估计的捷联惯导系统（SINS）粗对准阶段和卡尔曼滤波精对准阶段，并且后一阶段（高级阶段）以前一阶段（低级阶段）的分析结果为基础^[1,2]。对准阶段多必然导致初始对准时间变长，可是，对准精度往往只与高级阶段的数据处理结果精度有关，因此可以借助于数据存储的办法，在初始对准的不同阶段均利用相同的数据，有利于缩短初始对准时间。本章首先提出逆向导航算法，它是实现前一阶段解算结果与后一阶段初值设置之间衔接的一座重要桥梁。

动基座初始对准在军事中具有重要的应用价值，有利于增强武器系统的机动性能，提高自身生存能力。动基座初始对准可大致划分为两类：主子惯导之间的传递对准和使用其它辅助信息的惯导自对准，本章主要研究后者。考虑到战时GPS的不可完全依赖性，许多研究者提出了路标点和里程计辅助等动基座初始对准方法^[22-24]。但是路标点辅助初始对准对路标点依赖性强，在一定程度上降低了导航系统的机动性；由于数据处理方法的局限，通常意义上的里程计辅助对准存在这种问题：姿态矩阵对准实现了而载车实时位置却“丢失”了，文献[23, 24]也没有提出对准过程中位置导航问题的解决办法。就作者所知，在目前公开的文献报道中还未见一种既能实现动基座初始对准又能同时求得对准后精确运载体位置的有效算法。本章将动基座初始对准与位置导航划分为两个不同算法阶段，借助于逆向导航算法将它们有机结合起来，从而同时达到初始对准和位置导航的目的。

概括来说，逆向导航算法主要有两点应用，一是缩短初始对准时间；二是将初始对准与位置导航分阶段处理，弥补传统“单一性”或“一次性”算法的不足。

在初始对准算法方面，本章主要介绍捷联罗经对准算法。在分析经典平台罗

经初始对准原理的基础上,提出了捷联罗经初始对准的原理并推导了便于软件编程的具体算法,进一步的,在具备外界参考速度时,将其推广至捷联罗经动基座初始对准。捷联罗经初始对准方法具有算法简单、计算量小等优点,同时本章经过仔细分析也指出,与基于现代控制最优估计理论的卡尔曼滤波相比,特别是转动基座条件下罗经的不足之处是受加速度计常值零偏等因素的影响,究其原因根本原因在于捷联罗经初始对准方法未对加速度计常值零偏建模、估计和补偿。

2.2 逆向导航技术

可以将 SINS 中陀螺和加速度计的采样数据当作一组时间序列看待,通常意义下的导航解算是对该序列按时间先后顺序进行实时处理,而不必进行数据存储,就能获得实时导航结果。如果导航计算机存储容量足够大并且计算能力足够强的话,把采样数据存储下来,既然可以按时间顺序正向处理,很容易联想到,也可以对它作逆向分析和处理。在有些情况下无实时性要求时,对存储的采样数据作正向和逆向的反复分析,有可能提高分析精度,或者在某项任务中能够减小实际用于分析的数据长度,即缩短任务时间。

2.2.1 逆向捷联惯导算法

本章选取“东-北-天”(E-N-U)地理坐标系为导航坐标系,记为 n 系,“右-前-上”(R-F-U)坐标系为捷联惯组坐标系,记为 b 系。

SINS 的姿态、速度和位置导航算法可用如下一组微分方程表示

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{nb}^b \quad (2-1a)$$

$$\dot{\mathbf{v}}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}_{sf}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n + \mathbf{g}^n \quad (2-1b)$$

$$\dot{L} = \frac{v_N^n}{R_M + h}, \quad \dot{\lambda} = \frac{v_E^n \sec L}{R_N + h}, \quad \dot{h} = v_U^n \quad (2-1c)$$

式中

$$\boldsymbol{\Omega}_{nb}^b = (\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times), \quad \boldsymbol{\omega}_{nb}^b = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - (\mathbf{C}_b^n)^T (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n), \quad \mathbf{g}^n = [0 \quad 0 \quad -g]^T,$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = [0 \quad \omega_{ie} \cos L \quad \omega_{ie} \sin L]^T, \quad \boldsymbol{\omega}_{en}^n = \left[-\frac{v_N^n}{R_M + h} \quad \frac{v_E^n}{R_N + h} \quad \frac{v_E^n \tan L}{R_N + h} \right]^T;$$

$\mathbf{C}_b^n$ 、 $\mathbf{v}^n = [v_E^n \quad v_N^n \quad v_U^n]^T$ 、 L 、 λ 和 h 分别表示惯导姿态矩阵、速度、纬度、经度和高度; $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ 和 $\mathbf{f}_{sf}^b$ 分别表示陀螺角速度测量和加速度计比力测量; $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$ 和 g 分别

为地球自转角速率和当地重力加速度大小； R_M 和 R_N 分别为当地地球的子午圈和卯酉圈半径；运算符 $(\bullet \times)$ 表示由向量 $\bullet$ 构成的反对称矩阵。假设 SINS 中陀螺和加速度计采样周期均为 T_s ，将微分方程（2-1）式离散化为适合于计算机解算的递推算法（文中称之为正向导航算法），得

$$\mathbf{C}_{bk}^n = \mathbf{C}_{bk-1}^n (\mathbf{I} + T_s \boldsymbol{\Omega}_{nbk}^b) \quad (2-2a)$$

$$\mathbf{v}_k^n = \mathbf{v}_{k-1}^n + T_s [\mathbf{C}_{bk-1}^n \mathbf{f}_{sfk}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{iek-1}^n + \boldsymbol{\omega}_{enk-1}^n) \times \mathbf{v}_{k-1}^n + \mathbf{g}^n] \quad (2-2b)$$

$$L_k = L_{k-1} + \frac{T_s v_{Nk-1}^n}{R_M + h_{k-1}}, \quad \lambda_k = \lambda_{k-1} + \frac{T_s v_{Ek-1}^n \sec L_{k-1}}{R_N + h_{k-1}}, \quad h_k = h_{k-1} + T_s v_{Uk-1}^n \quad (2-2c)$$

式中

$$\boldsymbol{\Omega}_{nbk}^b = (\boldsymbol{\omega}_{nbk}^b \times), \quad \boldsymbol{\omega}_{nbk}^b = \boldsymbol{\omega}_{ibk}^b - (\mathbf{C}_{bk-1}^n)^T (\boldsymbol{\omega}_{iek-1}^n + \boldsymbol{\omega}_{enk-1}^n),$$

$$\boldsymbol{\omega}_{iek}^n = [0 \quad \omega_{ie} \cos L_k \quad \omega_{ie} \sin L_k]^T, \quad \boldsymbol{\omega}_{enk}^n = \begin{bmatrix} -\frac{v_{Nk}^n}{R_M + h_k} & \frac{v_{Ek}^n}{R_N + h_k} & \frac{v_{Ek}^n \tan L_k}{R_N + h_k} \end{bmatrix}^T,$$

($k=1,2,3\dots$)。假设从离散化的 t_0 时刻至 t_m 时刻，惯导系统从 A 点导航至 B 点，则为了使软件算法从 B 点逆向导航至 A 点，由（2-2）式移项并稍作变化，整理得逆向捷联惯导算法为

$$\mathbf{C}_{bk-1}^n = \mathbf{C}_{bk}^n (\mathbf{I} + T_s \boldsymbol{\Omega}_{nbk}^b)^{-1} \approx \mathbf{C}_{bk}^n (\mathbf{I} - T_s \boldsymbol{\Omega}_{nbk}^b) \approx \mathbf{C}_{bk}^n (\mathbf{I} + T_s \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{nbk-1}^b) \quad (2-3a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{k-1}^n &= \mathbf{v}_k^n - T_s [\mathbf{C}_{bk-1}^n \mathbf{f}_{sfk}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{iek-1}^n + \boldsymbol{\omega}_{enk-1}^n) \times \mathbf{v}_{k-1}^n + \mathbf{g}^n] \\ &\approx \mathbf{v}_k^n - T_s [\mathbf{C}_{bk}^n \mathbf{f}_{sfk-1}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{iek}^n + \boldsymbol{\omega}_{enk}^n) \times \mathbf{v}_k^n + \mathbf{g}^n] \end{aligned} \quad (2-3b)$$

$$\begin{aligned} L_{k-1} &= L_k - \frac{T_s v_{Nk-1}^n}{R_M + h_{k-1}} \approx L_k - \frac{T_s v_{Nk}^n}{R_M + h_k} \\ \lambda_{k-1} &= \lambda_k - \frac{T_s v_{Ek-1}^n \sec L_{k-1}}{R_N + h_{k-1}} \approx \lambda_k - \frac{T_s v_{Ek}^n \sec L_k}{R_N + h_k} \\ h_{k-1} &= h_k - T_s v_{Uk-1}^n \approx h_k - T_s v_{Uk}^n \end{aligned} \quad (2-3c)$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{nbk-1}^b = (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{nbk-1}^b \times), \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{nbk-1}^b = -[\boldsymbol{\omega}_{ibk-1}^b - (\mathbf{C}_{bk}^n)^T (\boldsymbol{\omega}_{iek}^n + \boldsymbol{\omega}_{enk}^n)]$$

若记 $\hat{\mathbf{C}}_{bm-j}^n = \mathbf{C}_{bj}^n$ 、 $\hat{\mathbf{v}}_{m-j}^n = -\mathbf{v}_j^n$ 、 $\hat{L}_{m-j} = L_j$ 、 $\hat{\lambda}_{m-j} = \lambda_j$ 、 $\hat{h}_{m-j} = h_j$ 、 $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ibm-j}^b = -\boldsymbol{\omega}_{ibj}^b$ 、 $\hat{\mathbf{f}}_{sfm-j}^b = \mathbf{f}_{sfj}^b$ 、 $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{iem-j}^n = -\boldsymbol{\omega}_{iej}^n$ 、 $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{enm-j}^n = -\boldsymbol{\omega}_{enj}^n$ 、 $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{nbm-j}^b = \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{nbj}^b$ 、 $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{nbm-j}^b = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{nbj}^b$ 、 $\hat{\omega}_{ie} = -\omega_{ie}$ ，($j=0,1,2\dots m$)，并且令 $p=m-k+1$ ，则通过记号和下标转换，比如

$C_{bk-1}^n = C_{bm-p}^n = \hat{C}_{bp}^n$ 和 $C_{bk}^n = C_{bm+1-p}^n = \hat{C}_{bp-1}^n$ 等, (2-3) 式按递推关系也可写成

$$\hat{C}_{bp}^n = \hat{C}_{bp-1}^n (\mathbf{I} + T_s \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{nbp}^b) \quad (2-4a)$$

$$\hat{\mathbf{v}}_p^n = \hat{\mathbf{v}}_{p-1}^n + T_s [\hat{C}_{bp-1}^n \hat{\mathbf{f}}_{sfp}^b - (2\hat{\boldsymbol{\omega}}_{iep-1}^n + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{enp-1}^n) \times \hat{\mathbf{v}}_{p-1}^n + \mathbf{g}^n] \quad (2-4b)$$

$$\hat{L}_p = \hat{L}_{p-1} + \frac{T_s \hat{v}_{Np-1}^n}{R_M + \hat{h}_{p-1}}, \quad \hat{\lambda}_p = \hat{\lambda}_{p-1} + \frac{T_s \hat{v}_{Ep-1}^n \sec \hat{L}_{p-1}}{R_N + \hat{h}_{p-1}}, \quad \hat{h}_p = \hat{h}_{p-1} + T_s \hat{v}_{Up-1}^n \quad (2-4c)$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{iep}^n = -\boldsymbol{\omega}_{iem-p}^n = -[0 \quad \omega_{ie} \cos L_{m-p} \quad \omega_{ie} \sin L_{m-p}]^T = [0 \quad \hat{\omega}_{ie} \cos \hat{L}_p \quad \hat{\omega}_{ie} \sin \hat{L}_p]^T,$$

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{enp}^n = -\boldsymbol{\omega}_{enm-p}^n$$

$$= -\begin{bmatrix} -\frac{v_{Nm-p}^n}{R_M + h_{m-p}} & \frac{v_{Em-p}^n}{R_N + h_{m-p}} & \frac{v_{Em-p}^n \tan L_{m-p}}{R_N + h_{m-p}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\frac{\hat{v}_{Np}^n}{R_M + \hat{h}_p} & \frac{\hat{v}_{Ep}^n}{R_N + \hat{h}_p} & \frac{\hat{v}_{Ep}^n \tan \hat{L}_p}{R_N + \hat{h}_p} \end{bmatrix}^T,$$

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{nbp}^b = (\hat{\boldsymbol{\omega}}_{nbp}^n \times),$$

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{nbp}^b = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{nbm-p}^b = -[\boldsymbol{\omega}_{ibm-p}^b - (C_{bm-p+1}^n)^T (\boldsymbol{\omega}_{iem-p+1}^n + \boldsymbol{\omega}_{enm-p+1}^n)] = \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ibp}^b - (\hat{C}_{bp-1}^n)^T (\hat{\boldsymbol{\omega}}_{iep-1}^n + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{enp-1}^n).$$

通过对比 (2-2) 式和 (2-4) 式, 发现它们在算法表示形式上是完全一致的。从上述分析过程中可以看出, 只要将正向算法中的陀螺采样和地球自转角速率符号取反, 并设置逆向导航算法的初值为 $\hat{C}_{b0}^n = C_{bm}^n$ 、 $\hat{\mathbf{v}}_0^n = -\mathbf{v}_m^n$ 、 $\hat{L}_0 = L_m$ 、 $\hat{\lambda}_0 = \lambda_m$ 、 $\hat{h}_0 = h_m$, 对采样数据作逆向处理, 即可实现从 t_m 时刻 (B 点) 至 t_0 时刻 (A 点) 的逆向导航解算。不难发现, 在正向与逆向导航过程中, 若不考虑计算误差的话, 两过程在数据序列的相同时刻, 其姿态矩阵相等, 位置坐标也相等, 而速度之间大小相等但符号相反。值得指出的是, 实际应用中捷联惯导解算宜采用四元数、等效旋转矢量和圆锥运动补偿等算法来减小算法性误差, 但同样可得到与文中类似的逆向算法和结论。从逆向捷联惯导算法中还可能求得以下两种逆向算法。

2.2.2 逆向姿态跟踪算法

如果捷联惯导系统在小范围内运动, 即其位置变化不大, 并且只要求输出姿态导航信息, 则在捷联惯导系统初始对准后, 可忽略速度和位置变化的影响, 只进行姿态更新解算 (不妨称为姿态跟踪), 姿态跟踪利用下式算法即可实现,

$$C_{bk}^n = C_{bk-1}^n (\mathbf{I} + T_s \boldsymbol{\Omega}_{nbk}^b) \quad (2-5)$$

其中

$\boldsymbol{\Omega}_{nbk}^b = (\boldsymbol{\omega}_{nbk}^b \times)$, $\boldsymbol{\omega}_{nbk}^b = \boldsymbol{\omega}_{ibk}^b - (\mathbf{C}_{bk-1}^n)^T \boldsymbol{\omega}_{ie0}^n$, $\boldsymbol{\omega}_{ie0}^n = [0 \quad \omega_{ie} \cos L_0 \quad \omega_{ie} \sin L_0]^T$, L_0 为捷联惯导系统所处的大致纬度。由此, 容易求得逆向姿态跟踪算法为

$$\hat{\mathbf{C}}_{bp}^n = \hat{\mathbf{C}}_{bp-1}^n (\mathbf{I} + T_s \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{nbp}^b) \quad (2-6)$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{nbp}^b = (\hat{\boldsymbol{\omega}}_{nbp}^n \times), \quad \hat{\boldsymbol{\omega}}_{nbp}^b = \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ibp}^b - (\hat{\mathbf{C}}_{bp-1}^n)^T \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie0}^n, \quad \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie0}^n = [0 \quad \hat{\omega}_{ie} \cos L_0 \quad \hat{\omega}_{ie} \sin L_0]^T。$$

2.2.3 逆向航位推算算法

由里程计(或测速仪)与捷联惯导系统结合可构成航位推算系统, 假设里程计或测速仪采样周期也为 T_s , 在 t_k 时刻采样输出的路程增量或速度在 b 系上投影分别为 $\Delta \mathbf{s}_k^b$ 和 $\mathbf{v}_{sk}^b$, 不妨记 $\Delta \mathbf{s}_k^b / T_s = \mathbf{v}_{sk}^b$, 则统一以 $\mathbf{v}_{sk}^b$ 推导的航位推算算法可写成

$$\mathbf{C}_{bk}^n = \mathbf{C}_{bk-1}^n (\mathbf{I} + T_s \boldsymbol{\Omega}_{nbk}^b) \quad (2-7a)$$

$$\mathbf{v}_{sk}^n = \mathbf{C}_{bk-1}^n \mathbf{v}_{sk}^b \quad (2-7b)$$

$$L_k = L_{k-1} + \frac{T_s \mathbf{v}_{sNk}^n}{R_M + h_{k-1}}, \quad \lambda_k = \lambda_{k-1} + \frac{T_s \mathbf{v}_{sEk}^n \sec L_{k-1}}{R_N + h_{k-1}}, \quad h_k = h_{k-1} + T_s \mathbf{v}_{sUk}^n \quad (2-7c)$$

其中

$$\boldsymbol{\Omega}_{nbk}^b = (\boldsymbol{\omega}_{nbk}^b \times), \quad \boldsymbol{\omega}_{nbk}^b = \boldsymbol{\omega}_{ibk}^b - (\mathbf{C}_{bk-1}^n)^T (\boldsymbol{\omega}_{iek-1}^n + \boldsymbol{\omega}_{enk-1}^n)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{iek}^n = [0 \quad \omega_{ie} \cos L_{k-1} \quad \omega_{ie} \sin L_{k-1}]^T, \quad \boldsymbol{\omega}_{enk-1}^n = \left[-\frac{\mathbf{v}_{sNk}^n}{R_M + h_{k-1}} \quad \frac{\mathbf{v}_{sEk}^n}{R_N + h_{k-1}} \quad \frac{\mathbf{v}_{sUk}^n \tan L_{k-1}}{R_N + h_{k-1}} \right]^T。$$

这里直接给出相应的逆向航位推算算法为

$$\hat{\mathbf{C}}_{bp}^n = \hat{\mathbf{C}}_{bp-1}^n (\mathbf{I} + T_s \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{nbp}^b) \quad (2-8a)$$

$$\hat{\mathbf{v}}_{sp}^n = \hat{\mathbf{C}}_{bp-1}^n \hat{\mathbf{v}}_{sp}^b \quad (2-8b)$$

$$\hat{L}_p = \hat{L}_{p-1} + \frac{T_s \hat{\mathbf{v}}_{sNp}^n}{R_M + \hat{h}_{p-1}}, \quad \hat{\lambda}_p = \hat{\lambda}_{p-1} + \frac{T_s \hat{\mathbf{v}}_{sEp}^n \sec \hat{L}_{p-1}}{R_N + \hat{h}_{p-1}}, \quad \hat{h}_p = \hat{h}_{p-1} + T_s \hat{\mathbf{v}}_{Up}^n \quad (2-8c)$$

其中

$$\hat{\mathbf{v}}_{sm-j}^b = -\mathbf{v}_{sj}^b, \quad \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{nbp}^b = (\hat{\boldsymbol{\omega}}_{nbp}^n \times), \quad \hat{\boldsymbol{\omega}}_{nbp}^b = \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ibp}^b - (\hat{\mathbf{C}}_{bp-1}^n)^T (\hat{\boldsymbol{\omega}}_{iep-1}^n + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{en-1}^n),$$

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{iep-1}^n = [0 \quad \hat{\omega}_{ie} \cos \hat{L}_{p-1} \quad \hat{\omega}_{ie} \sin \hat{L}_{p-1}]^T,$$

$$\hat{\omega}_{enp-1}^n = \begin{bmatrix} -\frac{\hat{v}_{sNp}^n}{R_M + \hat{h}_{p-1}} & \frac{\hat{v}_{sEp}^n}{R_N + \hat{h}_{p-1}} & \frac{\hat{v}_{sEp}^n \tan \hat{L}_{p-1}}{R_N + \hat{h}_{p-1}} \end{bmatrix}^T$$

可见，在逆向航位推算算法中将里程计（或测速仪）采样输出符号也进行了取反处理。

2.3 捷联罗经初始对准原理及其实现

平台惯导系统（PINS）罗经初始对准过程通常可分为两步，先是水平调平，然后是方位对准。方位对准在水平调平的基础上进行，一般采样罗经方位对准方法。方位罗经对准利用的是罗经效应，也就是，在正确的平台跟踪当地地理坐标系的角速率控制指令下，如果平台存在方位轴向的偏差角，平台将产生绕东向轴的倾斜，该倾斜能由北向加速度计感测到，利用北向加速度计的输出并设计适当的控制规律，控制平台方位轴朝减小方位偏差方向转动，实现平台自动寻北。在常规思路下，通常将 SINS 初始对准分为粗对准和精对准两个阶段：在粗对准阶段，利用地球自转角速度和重力加速度作为参考基准量，通过惯性器件的测量输出建立粗略的导航计算坐标系；在精对准阶段，通过现代控制理论最优估计方法估计出失准角，经修正后获得准确的姿态矩阵。

SINS 经典解析式粗对准方法难以适应晃动干扰环境，有不少文献研究了晃动基座下的初始对准问题并且也出现一些应用实例，激光陀螺和光纤陀螺的发展和不断成熟为捷联罗经的研究注入了新的活力^[21]。从本质上说，捷联惯导系统与平台惯导系统是相同的，前者以数学平台（利用姿态矩阵、四元数或欧拉角等数学工具）模拟后者的实体平台，描述 SINS 相对于给定参考坐标系的空间方位。PINS 中实体平台具有隔离外界干扰的作用，因而平台罗经能够实现晃动基座下的初始对准，同理，在 SINS 初始对准中也可以根据平台罗经初始对准的特点，建立相应的数学平台隔离晃动影响。经典控制理论与现代最优估计方法相比，前者的优点之一是无需精确的数学模型与噪声模型，此外，应用经典控制理论进行罗经对准的设计方法已经非常成熟，为捷联罗经对准方案设计提供了大量的参考，然而初始对准时间长是平台罗经的一大缺点。快速初始对准是国内在捷联罗经对准方法研究中亟待解决的一个主要问题，该问题在某些西方国家已得到较好解决，例如法国 iXSea 公司的 Octans III 型光纤捷联陀螺罗经在动态环境下，能在 3min 内完成初始对准，达到 $0.2^\circ \times \sec(L)$ 的精度^[18]，成为捷联罗经研究与应用中的佼佼者，它也为我们的研究和工程开发目标提供了参考。

本节从分析平台罗经初始对准的原理出发，提出了捷联罗经初始对准的原理

并推导了便于软件编程的具体算法，通过对大方位误差角 SINS 非线性误差方程的简化，推导了粗略方位自对准的算法公式，根据 SINS 数学平台多样性的特点，设计了缩短捷联罗经初始对准时间的具体步骤，通过试验表明快速捷联罗经对准方案是有效的。

2.3.1 平台罗经初始对准原理与误差分析

平台惯导系统的罗经初始对准原理框图如图 2-1~图 2-3 所示^[1,2]。

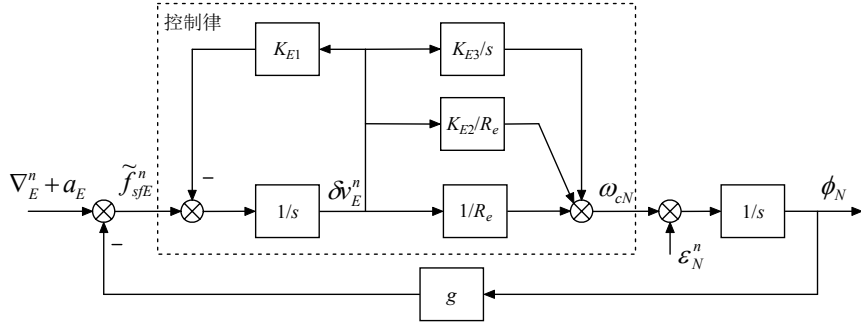


图 2-1 水平对准东向通道

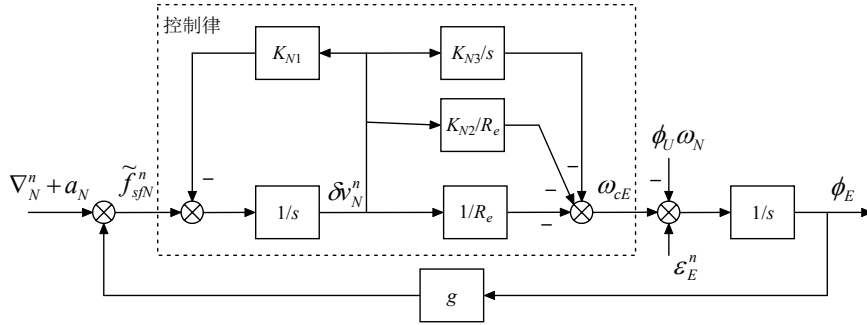


图 2-2 水平对准北向通道

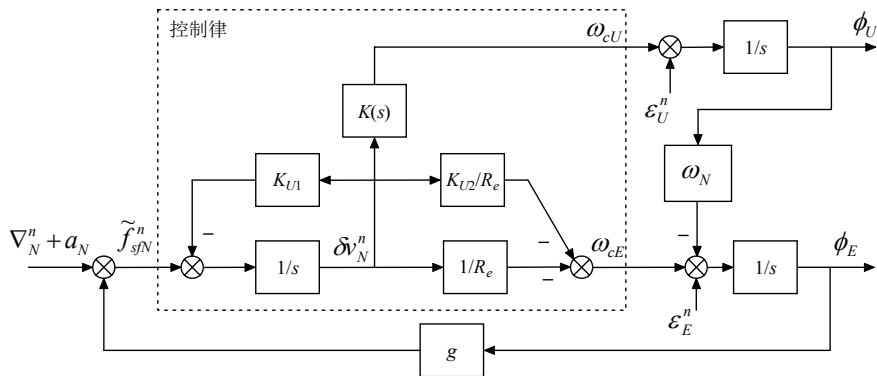


图 2-3 罗经方位对准

图中各符号的意义为：\$\nabla_E^n\$ 和 \$\nabla_N^n\$ 分别为东向和北向加速度计零偏；\$a_E\$ 和 \$a_N\$ 分别

为环境干扰加速度； $\tilde{f}_{s/E}^n$ 和 $\tilde{f}_{s/N}^n$ 分别为东向和北向加速度计输出； ε_E^n 、 ε_N^n 和 ε_U^n 分别为东向、北向和天向陀螺漂移； ϕ_E 、 ϕ_N 和 ϕ_U 分别为东向、北向和天向平台误差角； ω_{cE} 、 ω_{cN} 和 ω_{cU} 分别为施加给平台的东向、北向和天向控制角速率； $\omega_N = \omega_{ie} \cos L$ ， $\omega_{ie} = 2\pi/T_{ie}$ ； ω_{ie} 、 g 、 R_e 和 L 分别为地球自转角速率、重力加速度大小、地球半径和当地地理纬度，它们均是已知量， T_{ie} 是地球自转周期约为 24h；图中水平对准采用三阶调平回路，方位对准在北向二阶调平回路基础上采用四阶罗经对准回路。在罗经方位对准回路图 2-3 中一般选择

$$K(s) = \frac{K_{U3}}{(s + K_{U4})\omega_N} \quad (2-9)$$

图中 K_{ij} ($i = E, N, U; j = 1, 2, 3, 4$) 为对准控制律的调节参数，可根据实际控制要求设计，例如，东向对准通道和方位对准通道调节参数的典型取值如下：

$$K_{E1} = 3\sigma, \quad K_{E2} = \frac{\sigma^2(2+1/\xi^2)}{\omega_s^2} - 1, \quad K_{E3} = \frac{\sigma^3}{g\xi^2} \quad (2-10a)$$

$$K_{U1} = K_{U4} = 2\sigma, \quad K_{U2} = \frac{4\sigma^2}{\omega_s^2} - 1, \quad K_{U3} = \frac{4\sigma^4}{g} \quad (2-10b)$$

北向对准通道与东向对准通道参数选取方法 (2-10a) 式类似。(2-10) 式中 σ 、 ξ 和 $\omega_s = \sqrt{g/R_e}$ 分别称为衰减系数、阻尼比和休拉频率，通常选择阻尼比 $\xi = \sqrt{2}/2 \approx 0.707$ ，而根据实际对准的精确性和快速性要求，并结合环境干扰强弱程度，调整衰减系数 σ 。需要指出的是，水平通道与方位通道选择的衰减系数往往是不相同的，一般前者大于后者，下文中要注意它们使用场合的区别。

典型的二阶控制系统极点与物理参数之间的关系如图 2-4 所示，其中 ω_n 、 ω_d 分别为无阻尼振荡频率和阻尼振荡频率。

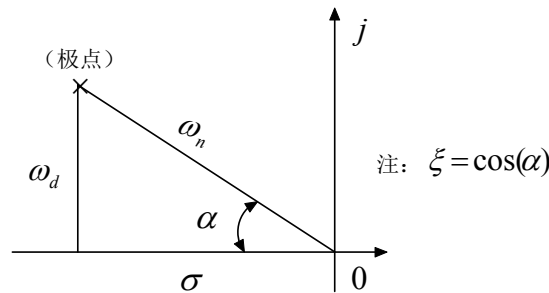


图 2-4 二阶控制系统极点与调节参数之间关系

根据图 2-4 有 $\omega_d/\sigma = \tan \alpha$ ，即有 $\sigma = \omega_d \xi / \sqrt{1-\xi^2}$ ，再根据角频率与周期之间的关系 $\omega_d = 2\pi/T_d$ ，得

$$\sigma = \omega_d \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \bigg|_{\xi=\sqrt{2}/2} = \omega_d = \frac{2\pi}{T_d} \quad (2-11)$$

其中 T_d 为阻尼振荡周期, T_d 的含义是在无零点的二阶典型系统中阶跃响应以 T_d 为周期逐渐收敛, 图 2-5 显示的是 $T_d=100\text{s}$ 时的阶跃响应曲线 (为了方便看出振荡特性, 将阻尼比设置得适当小, 其中 $\xi=0.2$)。相比于衰减系数 σ 而言, 若以 T_d 作为调节参数, 在确定初始对准时间长短方面意义更加直观。显然, 如果要求较短的对准时间, 应将 T_d 设置为较小值, 但是环境干扰强度和惯性器件的精度通常决定了 T_d 不能选得太小。

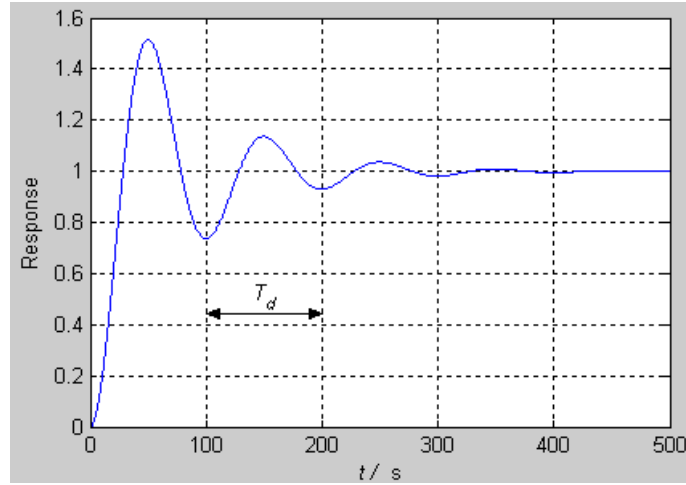


图 2-5 $T_d=100\text{s}$ 的阶跃响应曲线

常见的惯导教科书上都有分析且指出, 当不考虑环境干扰加速度影响, 并将加速度计零偏与陀螺漂移看成常值时, 图 2-1 中 ϕ_N 、图 2-2 中 ϕ_E 和图 2-3 中 ϕ_U 的对准极限精度分别为

$$\phi_N(\infty) = \nabla_E^n / g, \quad \phi_E(\infty) = -\nabla_N^n / g \quad (2-12a)$$

$$\phi_U(\infty) = \frac{\varepsilon_E^n}{\omega_N} + \frac{(K_{U2}+1)K_{U4}}{R_e K_{U3}} \varepsilon_U^n \quad (2-12b)$$

当如(2-10b)式选择调节参数, 并且 $\xi = \sqrt{2}/2$ 时, 有方位对准的极限精度(2-12b)式简化为

$$\begin{aligned} \phi_U(\infty) &= \frac{\varepsilon_E^n}{\omega_N} + \frac{(4\sigma^2 / \omega_s^2) \cdot (2\sigma)}{R_e \cdot 4\sigma^4 / g} \varepsilon_U^n \\ &= \frac{\varepsilon_E^n}{\omega_N} + \frac{2}{\sigma} \varepsilon_U^n = \frac{\varepsilon_E^n}{\omega_N} + 2 \frac{T_d}{T_{ie}} \cos L \cdot \frac{\varepsilon_U^n}{\omega_N} \end{aligned} \quad (2-12b')$$

由此可见, 若 ε_E^n 与 ε_U^n 为同等量级大小时, 选择小的 T_d 可以降低天向陀螺漂移给

对准精度造成的不良影响，但是一般情况下 T_d 为几分钟到几十分钟，远远小于地球自转周期 T_{ie} ，即 $T_d \ll T_{ie}$ ，因此 (2-12b') 式中 $\varepsilon_E^n / \omega_N$ 占主要成份。

下面分析其它更多可能的加速度计零偏与陀螺漂移误差因素的影响，它们在捷联罗经动基座初始对准误差估计中有重要的应用。

根据梅逊 (Mason) 增益公式，由图 2-3 计算输出 ϕ_E 的表达式，得

$$\begin{aligned} \phi_E(s) &= \frac{\nabla_N^n \frac{1}{s+K_{U1}} \cdot [-\frac{1+K_{U2}}{R_e} - K(s)\frac{1}{s}\omega_N] \frac{1}{s} + \varepsilon_E^n \frac{1}{s} + \varepsilon_U^n \frac{1}{s}\omega_N (-1)\frac{1}{s}}{1 - g \frac{1}{s+K_{U1}} \cdot [-\frac{1+K_{U2}}{R_e} - K(s)\frac{1}{s}\omega_N] \frac{1}{s}} \\ &= \frac{-[s\frac{1+K_{U2}}{R_e} + K(s)\omega_N]\nabla_N^n + s(s+K_{U1})\varepsilon_E^n - (s+K_{U1})\omega_N\varepsilon_U^n}{s^2(s+K_{U1}) + sg\frac{1+K_{U2}}{R_e} + gK(s)\omega_N} \end{aligned} \quad (2-13)$$

当 $\nabla_N^n, \varepsilon_U^n$ 均为常值，而 ε_E^n 为斜坡漂移，其斜率为 $\varepsilon_E'^n$ 时，并考虑到 (2-9) 式、(2-10b) 式和 $\xi = \sqrt{2}/2$ 时，可计算得 ϕ_E 的稳态值

$$\begin{aligned} \phi_E(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s\phi_E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-K(s)\omega_N\nabla_N^n + K_{U1}\varepsilon_E'^n - K_{U1}\omega_N\varepsilon_U^n}{gK(s)\omega_N} \\ &= -\frac{\nabla_N^n}{g} + \frac{K_{U1}K_{U4}\varepsilon_E'^n}{gK_{U3}} - \frac{K_{U1}K_{U4}\omega_N\varepsilon_U^n}{gK_{U3}} = -\frac{\nabla_N^n}{g} + \frac{1}{\sigma^2}\varepsilon_E'^n - \frac{\omega_N\varepsilon_U^n}{\sigma^2} \\ &= -\frac{\nabla_N^n}{g} + \frac{1}{\sigma^2}\varepsilon_E'^n - (\frac{\omega_N}{\omega_d})^2 \frac{\varepsilon_U^n}{\omega_N} = -\frac{\nabla_N^n}{g} + \frac{T_d^2}{4\pi^2}\varepsilon_E'^n - (\frac{T_d}{T_{ie}})^2(\cos L)^2 \cdot \frac{\varepsilon_U^n}{\omega_N} \end{aligned} \quad (2-14)$$

一般情况下 $T_d \ll T_{ie}$ ，使得 (2-14) 式中第三项 ε_U^n 的影响可以忽略，再者，若假设 $T_d = 10\text{min}$ 和 $\varepsilon_E'^n = 0.01^\circ/\text{h}/10\text{min}$ ，则 $T_d^2/(4\pi^2) \cdot \varepsilon_E'^n \approx 4.2 \times 10^{-50}$ ，这说明在方位对准期间，等效东向陀螺斜坡漂移和等效北向陀螺常值漂移对水平对准东向通道精度的影响都是非常小的。显然，减小周期 T_d 可进一步降低 $\varepsilon_E'^n$ 的不利影响，但是从抗干扰方面考虑往往不能将 T_d 设置得过小。从 (2-14) 式中仍可近似确定 ϕ_E 的极限对准精度为 $-\nabla_N^n/g$ ，结果与 (2-12a) 相同。

同理，根据梅逊增益公式，由图 2-1 计算从 ε_N^n 至输出 ϕ_N 的表达式，得

$$\begin{aligned} \phi_N(s) &= \frac{\varepsilon_N^n \cdot 1/s}{1 - g(-1)\frac{1}{s+K_{E1}} \cdot (\frac{1+K_{E2}}{R_e} + \frac{K_{E3}}{s})\frac{1}{s}} \\ &= \frac{s(s+K_{E1})\varepsilon_N^n}{s^2(s+K_{E1}) + g \cdot (s\frac{1+K_{E2}}{R_e} + K_{E3})} \end{aligned} \quad (2-15)$$

当假设陀螺漂移为斜坡漂移，其斜率为 $\varepsilon_N'^n$ 时，则 ϕ_N 的稳态值为

$$\phi_N(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \phi_N(s) = \frac{K_{E1} \varepsilon_N''}{g K_{E3}} = \frac{3\xi^2}{\sigma^2} = \frac{3T_d^2}{8\pi^2} \varepsilon_N'' \quad (2-15')$$

可见, 等效北向陀螺斜坡漂移对北向通道对准精度的影响与东向陀螺斜坡漂移对东向通道的影响 (2-14) 式类似, 同理, 可求得图 2-2 中东向陀螺斜坡漂移对 ϕ_E 的影响也类似于 (2-15') 式。但是一般在水平对准时, 其阻尼振荡周期会比方位对准的设置得更小, 因此 ϕ_N' 往往会比 (2-14) 式的第二项 $T_d^2/(4\pi^2) \cdot \varepsilon_E''$ 更小些, 亦可忽略不计。

最后分析一下, 如果图 2-3 中的北向加速度计零偏 ∇_N^n 不是常值, 它会给方位对准精度造成何种影响? 从 ∇_N^n 至 ϕ_U 的传递函数为

$$\begin{aligned} \phi_U(s) &= \frac{\nabla_N^n \frac{1}{s + K_{U1}} \cdot K(s) \frac{1}{s}}{1 - g \frac{1}{s + K_{U1}} \cdot \left[-\frac{1 + K_{U2}}{R_e} - K(s) \frac{1}{s} \omega_N \right] \frac{1}{s}} \\ &= \frac{-sK(s)\nabla_N^n}{s^2(s + K_{U1}) + sg \frac{1 + K_{U2}}{R_e} + gK(s)\omega_N} \end{aligned} \quad (2-16)$$

假设 ∇_N^n 为斜坡函数, 斜率为 ∇_N'' , 则 ϕ_U 的稳态值为

$$\phi_U(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \phi_U(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-sK(s)\nabla_N'' \frac{1}{s^2}}{s^2(s + K_{U1}) + sg \frac{1 + K_{U2}}{R_e} + gK(s)\omega_N} = \frac{-\nabla_N''/g}{\omega_N} \quad (2-17)$$

例如取 ∇_N'' 为 $10^{-4}g/5\text{min}$, 则有 $\phi_U(\infty) = 0.26^\circ \times \sec(L)$, 由此可见 ∇_N'' 的斜坡性变化对罗经方位对准精度影响比较大, 特别是对于带温控的石英加速度计而言, 在惯导系统预热不充分期间进行初始对准, 很可能出现该误差, 不幸的是多数人在研究和工程实践中都忽略了这一点, 值得投入更多的关注。比较 (2-12b') 式与 (2-17) 式, 从表达形式上看, $-\nabla_N''/g$ 等效于东向陀螺漂移, 它们对方位对准误差的贡献是相同的。换句话说, 要获得高的方位初始对准精度, 除要求东向陀螺漂移小外, 在对准期间还需保证北向加速度计零偏也足够稳定。

利用上述结论可以解释以下现象: 假设在有角运动而无明显线运动的准静基座下进行捷联罗经方位对准, 惯导系统绕方位轴缓慢转动, 再假设 b 系下的实体加速度计零偏是固定不变的, 但它依然会引起惯导系统的等效北向加速度计零偏随时间变化, 当实体加速度计常值零偏比较大时, 且在极端转动条件下 (譬如在对准期间恰好匀速绕方位轴转动 180° , 等效北向零偏将按正弦规律变化), 这种情况下, 等效北向零偏的变化对方位对准精度的影响也是不容忽视的。也就是说,

当加速度计存在常值零偏时,动基座或者大角度转动的准静基座捷联罗经初始对准往往比小角度晃动的静基座初始对准精度低。与平台罗经初始对准平台隔离的优点相比,这是捷联罗经的一个不足之处。不难证明,利用其它初始对准方法,如卡尔曼滤波最优估计对准,也存在等效北向加速度计斜坡性零偏影响方位对准精度的现象,但是通过精确建立的卡尔曼滤波模型,将实体加速度计常值零偏列入状态,在转动条件下可能提高常值零偏的可观性,有一定滤波估计效果,从而降低转动情况下常值零偏对方位对准的不利影响,这是现代控制理论中最优估计方法的一大优势。所以可以指出,转动条件下实体加速度计常值零偏影响捷联罗经方位对准的根本原因在于捷联罗经方法未对常值零偏建模、估计和补偿。当然,不论是否转动,以速度误差为观测量的卡尔曼滤波对实体加速度计斜坡性零偏误差估计也是无能为力的,仅以简单的不转动情况为例说明,此时等效北向加速度计斜坡性零偏与等效东向陀螺常值漂移性质相同,它们都直接与北向速度误差的二次系数相关,无法从速度误差中区分斜坡性零偏和常值漂移,详细推导过程参见本章附录(需要注意的是,由于陀螺漂移在平台系统对实体平台误差角的影响是同向的,而在捷联系统对数学平台误差角的影响是反向的,导致(2-12b')式与本章附录(A6)式中的 ε_E^n 的符号正好相反),所以利用卡尔曼滤波实现高精度初始对准时也要求加速度计零偏稳定。

2.3.2 捷联罗经初始对准原理及算法

在 SINS 中以数学平台模拟 PINS 中的实体平台,如图 2-6 所示,图中 $\tilde{\mathbf{C}}_b^n$ 为计算捷联姿态矩阵(或者用 $\mathbf{C}_b^n$ 表示),起数学平台作用, $\tilde{\omega}_{ib}^b$ 和 $\tilde{\mathbf{f}}_{sf}^b$ 分别是陀螺和加速度计的测量值; $\omega_c = [\omega_{cE} \ \omega_{cN} \ \omega_{cU}]^T$ 是施加给数学平台的控制角速率, $\omega_{ie}^n = [0 \ \omega_{ie} \cos L \ \omega_{ie} \sin L]^T = [0 \ \omega_N \ \omega_U]^T$; $\tilde{\mathbf{f}}_{sf}^b$ 经 $\tilde{\mathbf{C}}_b^n$ 变换后成为数学平台视加速度输出 $\tilde{\mathbf{f}}_{sf}^n = [\tilde{f}_{sfE}^n \ \tilde{f}_{sfN}^n \ \tilde{f}_{sfU}^n]^T$ 。

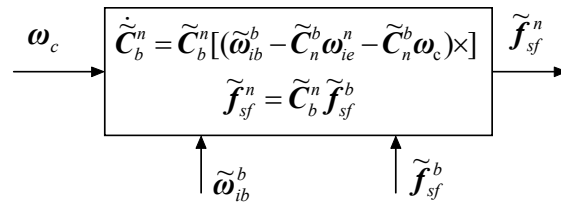


图 2-6 捷联数学平台

在平台惯导罗经初始对准原理图 2-1~图 2-3 中,一部分信号流代表实体平台的运动规律,另一部分信号流表示对准控制规律,将它们移植到捷联罗经对准时,实体平台变为数学平台,而控制规律不变。以东向对准通道为例,由图 2-1

中控制规律与图 2-6 结合，构成捷联罗经水平对准的东向通道，如图 2-7 所示，陀螺和加速度计测量误差隐含在数学平台解算之中。图 2-1 与图 2-7 不同的是，前者以平台误差角表示，直观显示了平台误差传递规律，而后者直接以数学平台表示，便于软件算法编程和直观理解，其实两者在误差传递本质上还是一致的（除了陀螺漂移的影响符号正好相反外）。

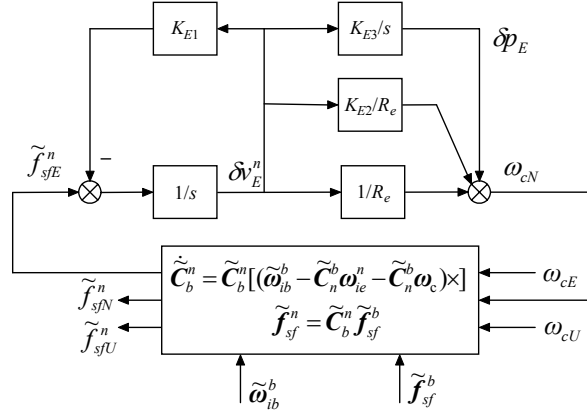


图 2-7 捷联罗经水平对准东向通道

从图 2-7 中可以得到以下控制规律

$$\delta v_E^n = (\tilde{f}_{sfE}^n - K_{E1} \delta v_E^n) / s \quad (2-18a)$$

$$\delta p_E = K_{E3} \delta v_E^n / s \quad (2-18b)$$

$$\omega_{cN} = \delta v_E^n (1 + K_{E2}) / R_e + \delta p_E \quad (2-18c)$$

假设捷联数学平台的更新时间为 T_s ，实际中对准回路的时间参数 T_d 一般远远大于 T_s ，所以可以直接用一阶差分近似代替微分，将（2-18）式分别离散化为

$$\delta v_{Ek}^n = \delta v_{Ek-1}^n + (\tilde{f}_{sfEk}^n - K_{E1} \delta v_{Ek-1}^n) T_s \quad (2-19a)$$

$$\delta p_{Ek} = \delta p_{Ek-1} + K_{E3} \delta v_{Ek}^n T_s \quad (2-19b)$$

$$\omega_{cNk} = \delta v_{Ek}^n (1 + K_{E2}) / R_e + \delta p_{Ek} \quad (2-19c)$$

式中 $k = 1, 2, 3 \dots$ 。

同理，由图 2-2 和图 2-6 结合可构成捷联罗经水平对准的北向通道图 2-8，由图 2-3 和图 2-6 结合可构成捷联罗经方位对准图 2-9，并将图 2-8 和图 2-9 中的控制规律分别离散化为（2-20）式和（2-21）式。

$$\delta v_{Nk}^n = \delta v_{Nk-1}^n + (\tilde{f}_{sfNk}^n - K_{N1} \delta v_{Nk-1}^n) T_s \quad (2-20a)$$

$$\delta p_{Nk} = \delta p_{Nk-1} + K_{N3} \delta v_{Nk}^n T_s \quad (2-20b)$$

$$\omega_{cEk} = -\delta v_{Nk}^n (1 + K_{N2}) / R_e - \delta p_{Nk} \quad (2-20c)$$

$$\delta \mathbf{v}_{Nk}^n = \delta \mathbf{v}_{Nk-1}^n + (\tilde{f}_{stNk}^n - K_{U1} \delta \mathbf{v}_{Nk-1}^n) T_s \quad (2-21a)$$

$$\omega_{cEk} = -\delta v_{Nk}^n (1 + K_{U2}) / R_e \quad (2-21b)$$

$$\omega_{cUk} = (K_{U3} \delta v_{Nk}^n T_s / \omega_N + \omega_{cUk-1}) / (1 + K_{U4} T_s) \quad (2-21c)$$

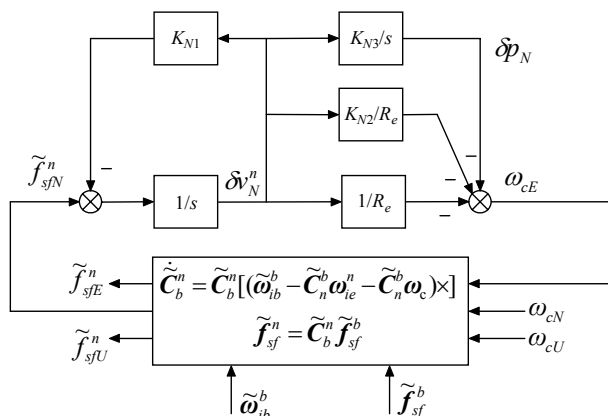


图 2-8 捷联罗经水平对准北向通道

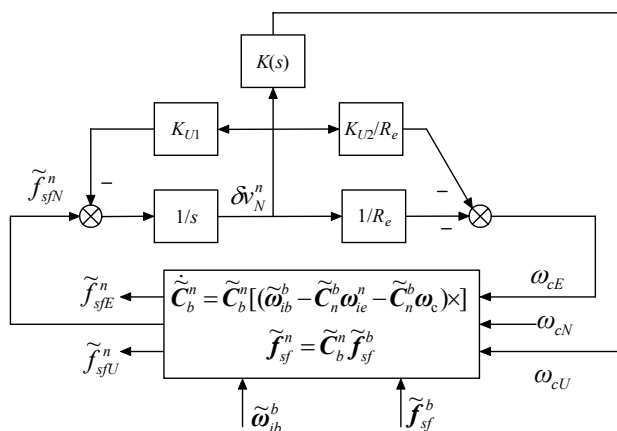


图 2-9 捷联罗经方位对准

此外,将捷联数学平台也按更新周期 T_s 离散化成(2-22)式(在实际应用时选择四元数、等效旋转矢量和圆锥运动补偿等更新算法有利于减小算法误差,此处不再详述)。由(2-19)式~(2-22)式便构成了完整的捷联罗经初始对准算法。

$$\tilde{\mathbf{C}}_{bk}^n = \tilde{\mathbf{C}}_{bk-1}^n [\mathbf{I} + (\tilde{\omega}_{ibk}^b T_s - \tilde{\mathbf{C}}_{nk-1}^b \omega_{ie}^n T_s - \tilde{\mathbf{C}}_{nk-1}^b \omega_{ck} T_s) \times] \quad (2-22a)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_{sflk}^n = \tilde{\mathbf{C}}_{bk}^n \tilde{\mathbf{f}}_{sflk}^b \quad (2-22b)$$

2.3.3 捷联罗经初始对准步骤

平台罗经初始对准前一般先通过外界装订粗略方位角，捷联罗经初始对准时也可装订粗略方位角，如果通过外界装订粗略方位角，则捷联罗经初始对准与平台罗经初始对准过程完全一致。这里介绍不装订方位角的初始对准过程，它可分为以下四个阶段。

①方位角未知情况下水平对准

在方位角完全未知情况下，不妨将它的初始值假设为零，又因为载车和舰船等运载体在初始对准过程中水平姿态角通常不大（如满足小于 30° 要求），所以不妨假设两个水平姿态角初始值也为零。先初始化捷联姿态矩阵，设为 $\tilde{\mathbf{C}}_b^n(t_0)$ ，再利用图 2-7 和图 2-8 两个通道一起共同构成水平对准方案，而第三控制角速率分量 ω_{cu} 直接置为零。由于方位完全未知，方位误差角可能很大，在捷联系统方位不转动时，此时可将地球自转角速度等效为陀螺常值漂移，作为水平对准的干扰量，通过分析三阶水平对准回路图 2-1 和图 2-2 知，陀螺常值漂移不影响水平对准的精度，稳态精度仍然取决于加速度计零偏误差。但当水平对准期间出现方位转动时，由 (2-15') 式也可以给地球自转对水平对准的影响作个粗略的估计，即若取 $T_d=10\text{s}$ 和 $\varepsilon_N''=2 \times 15^\circ/\text{h}/10\text{s}$ （设用 10s 绕方位轴缓慢转动 180° ），则 $3T_d^2/(8\pi^2) \cdot \varepsilon_N'' \approx 0.0032^\circ$ ，可见若 T_d 取得比较小，地球自转的影响基本可以忽略不计。设水平对准结束时求得姿态矩阵 $\tilde{\mathbf{C}}_b^n(t_{h1})$ 。

②粗略方位自对准

经过水平对准阶段①后，可以求得比较精确的惯导系统俯仰角和横滚角，能够达到水平姿态误差比较小（角分级）的要求，而应假设方位误差为大误差角。

首先，在大方位误差条件下利用公式 (2-23) 式进行不带控制项 ω_c 的捷联惯导速度解算（静基座下的导航速度也代表了捷联惯导的速度误差）。

$$\dot{\tilde{\mathbf{C}}}_b^n = \tilde{\mathbf{C}}_b^n [(\tilde{\omega}_{ib}^b - \tilde{\mathbf{C}}_b^n \omega_{ie}^n) \times] \quad (2-23a)$$

$$\delta \dot{\mathbf{v}}^n = \tilde{\mathbf{C}}_b^n \tilde{\mathbf{f}}_{sf}^b + \mathbf{g}^n \quad (2-23b)$$

式中 $\delta \mathbf{v}^n = [\delta v_E^n \quad \delta v_N^n \quad \delta v_U^n]^T$ ，将 $\tilde{\mathbf{C}}_b^n(t_{h1})$ 作为该阶段的数学平台初始值 $\tilde{\mathbf{C}}_b^n(0)$ ，并设置速度初值 $\delta \mathbf{v}^n(0) = 0$ 。

其次，对本报告第四章 (4-27) 式和 (4-27') 式描述的大方位误差角条件下的静基座阻尼 SINS 非线性误差方程进行简化，忽略方程右边水平姿态误差角、陀螺漂移和加速度计零偏等次要因素的影响后，近似如下

$$\dot{\phi}_E = -\sin(\phi_U) \omega_N \quad (2-24a)$$

$$\dot{\phi}_N = (1 - \cos \phi_U) \omega_N \quad (2-24b)$$

$$\dot{\phi}_U = 0 \quad (2-24c)$$

$$\delta \ddot{v}_E^n = -g \phi_N \quad (2-24d)$$

$$\delta \ddot{v}_N^n = g \phi_E \quad (2-24e)$$

将(2-24d)式和(2-24e)式再微分一次,并将(2-24a)式和(2-24b)式代入,建立速度误差与大方位误差角 ϕ_U 之间的关系

$$\delta \ddot{v}_E^n = g \omega_N (\cos \phi_U - 1) \quad (2-25a)$$

$$\delta \ddot{v}_N^n = -g \omega_N \sin \phi_U \quad (2-25b)$$

如果利用(2-23)式执行一段时间 $t_{\phi U}$ (如2分钟)的捷联惯导速度解算,假设 $t_{\phi U}$ 时刻数学平台变为 $\tilde{\mathbf{C}}_b^n(t_{\phi U})$ 、速度误差变为 $\delta \mathbf{v}_E^n(t_{\phi U})$ 和 $\delta \mathbf{v}_N^n(t_{\phi U})$,而(2-25)式又显示速度误差以二次方规律增长变化并仅与大方位误差角相关,在 $t_{\phi U}$ 时刻由(2-25)式二次积分后,可以粗略求得方位误差的三角函数值,即

$$\cos \phi_U = 2 \delta \mathbf{v}_E^n(t_{\phi U}) / (t_{\phi U}^2 g \omega_N) + 1 \quad (2-26a)$$

$$\sin \phi_U = -2 \delta \mathbf{v}_N^n(t_{\phi U}) / (t_{\phi U}^2 g \omega_N) \quad (2-26b)$$

最后,构造修正矩阵

$$\mathbf{C}_{\phi U} = \begin{bmatrix} \cos \phi_U & -\sin \phi_U & 0 \\ \sin \phi_U & \cos \phi_U & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

利用(2-27)式对 $t_{\phi U}$ 时刻姿态矩阵 $\tilde{\mathbf{C}}_b^n(t_{\phi U})$ 作一次修正,便实现了捷联罗经的粗略方位自对准,获得粗略姿态矩阵 $\tilde{\mathbf{C}}_b^{n'}(t_{\phi U})$ 。

$$\tilde{\mathbf{C}}_b^{n'}(t_{\phi U}) = \tilde{\mathbf{C}}_b^n(t_{\phi U}) \mathbf{C}_{\phi U} \quad (2-27)$$

③重新水平对准

在阶段①中完成水平对准的数学平台 $\tilde{\mathbf{C}}_b^n(t_{h1})$,水平姿态误差比较小,但经过粗略方位自对准阶段②后,数学平台 $\tilde{\mathbf{C}}_b^{n'}(t_{\phi U})$ 中的水平误差角有可能变大了(可能多达 0.5°),因此必须重新再进行一次水平对准,这次水平对准是在方位误差不大的条件下进行的,有别于阶段①,这一步骤将为后续罗经方位对准奠定基础。

④罗经方位对准

具备粗略方位和精确水平对准后,同时实施图2-7和图2-9所示的算法,其

中利用图 2-7 可进一步保持水平东向通道对准精度,而利用图 2-9 保持北向通道精度并到达罗经方位对准的目标。

容易看出,阶段③、④与装订粗略方位角后的平台罗经对准过程一样,这两阶段中的控制参数选取可完全参考平台罗经对准的设计参数。上述步骤中与经典平台罗经对准过程不同的是,借助于大方位误差条件下的阻尼 SINS 非线性误差简化方程,提出了捷联罗经粗略方位对准的方法,从静基座 SINS 速度误差中辨识出粗略方位误差角。

2.3.4 快速捷联罗经初始对准方法

惯导系统快速初始对准技术在实际中具有重要的应用价值。若按照 2.3.3 小节中的对准步骤逐次进行,完成捷联罗经初始对准必然需要较长时间,因此有必要采取一些措施缩短对准时间。

在 PINS 中,往往要利用速度和位置等导航解算结果对平台施加影响,形成反馈控制,迫使平台按指定的规律运动,以模拟特定的参考坐标系,由于系统中只存在一个实体平台,所以在使用某种导航算法控制平台运动时必然阻碍了其它导航算法的使用,也就是说,在 PINS 中难以同时使用多种导航算法。捷联惯导系统与平台惯导系统相比,前者最大的一个不同之处是没有实体平台,而利用数学平台描述其相对于参考坐标系的空间方位,完全由软件算法提供姿态、速度和位置等导航信息,导航信息一般不对捷联惯导系统硬件施加任何控制或影响,而仅用于修正数学平台。虽然 SINS 硬件组成中可能最少只含有一组惯性测量器件(三个单轴陀螺和三个单轴加速度计),但是其采样输出数据可以被复制成许多份完全相同的拷贝,利用每一份拷贝均可按不同需求生成各自的数学平台和相应的导航信息,各个数学平台之间互不干涉,不妨称 SINS 具备的这种特性为数学平台存在的多样性。

假设导航计算机存储容量足够大并且计算能力足够强,则导航计算机可以对 SINS 的采样数据进行存储,并应用不同的算法对已存储的数据进行反复计算,解算出当前时刻最优的导航结果。而这一特点在 PINS 中是不可能实现的,因为一旦对平台施加了某种控制后,就难以使平台恢复到控制前的状态以便重新实施另外一种控制算法,所以平台系统的控制只能采取先后串行办法进行。若将 SINS 存储的采样数据当作一组时间序列看待,正常情况下对该序列按时间先后从前往后进行分析,达到实现初始对准的目的。实际中由于处理或分析数据算法的局限性,难以仅凭借一种算法有效完成初始对准,必须将对准分解为几个阶段进行,后一阶段(高级阶段)以前一阶段(低级阶段)的分析结果为基础,例如方位罗

经对准必须在水平对准之后进行,逐步达到目标。如果简单地按对准阶段直接将采样数据序列进行分段分配,则越是在低级阶段中被利用的数据信息越少,若在高级阶段中将低级阶段数据丢弃不再利用将造成信息浪费,因此在高级阶段中还应当反过来重新挖掘低级阶段的数据信息,如此反复利用数据,必然能够增加高级阶段的可用信息量,或有利于缩短初始对准时间。

现不加证明地简要介绍一下逆向罗经对准通道的概念和构造思路。以捷联罗经水平对准东向通道为例,类似于逆向捷联惯性导航算法 2.2.1 节,将东向通道图 2-7 中数学平台的陀螺采样和地球自转角速率取反,并将控制律中的状态变量 δv_E^n 和 δp_E 取反,就构成了逆向捷联罗经水平对准东向通道。

下面提出一种缩短捷联罗经初始对准时间的具体步骤:

①将整个对准时间内(设从 t_s 时刻开始到 t_e 时刻结束)的陀螺和加速度计采样数据存储下来;

②以 t_e 时刻数据作为起始,进行逆向方位未知情况下的水平对准至 t_s 时刻,获得初始矩阵 $\tilde{\mathbf{C}}_b^n(t_{s0})$,从中计算 t_s 时刻的俯仰角 θ_{s0} 和横滚角 γ_{s0} (甚至还有状态初值 $-\delta v_E^n(0), -\delta p_E(0), -\delta v_N^n(0), -\delta p_N(0)$ 等),水平对准容易达到水平姿态误差角较小的要求, θ_{s0} 和 γ_{s0} 将作为后续步骤的水平基准初值使用;

③以 $\tilde{\mathbf{C}}_b^n(t_{s0})$ 作为初值进行正向方位粗略自对准,利用 (2-23) 式进行捷联惯导速度解算至某个适当的 $t_{\phi U}$ 时刻,从速度误差中求解校正矩阵 $\mathbf{C}_{\phi U}$,并应用 (2-27) 式求解含粗略方位信息的矩阵 $\tilde{\mathbf{C}}_b^{n'}(t_{\phi U})$;

④以 $\tilde{\mathbf{C}}_b^{n'}(t_{\phi U})$ 为初值,从 $t_{\phi U}$ 时刻至 t_s 时刻进行逆向姿态解算,求得姿态矩阵 $\tilde{\mathbf{C}}_b^{n'}(t_{s0})$,从中计算粗略方位角 ψ_{s0} ;

⑤以 θ_{s0} 、 γ_{s0} 和 ψ_{s0} 构造姿态矩阵 $\tilde{\mathbf{C}}_b^n(t_{s1})$,从 t_s 时刻开始到 t_e 时刻进行第一次罗经方位对准,记结果姿态矩阵为 $\tilde{\mathbf{C}}_b^n(t_{e1})$;

⑥以 $\tilde{\mathbf{C}}_b^n(t_{e1})$ 为初值,从 t_e 时刻至 t_s 时刻进行逆向姿态解算,求得姿态矩阵 $\tilde{\mathbf{C}}_b^{n'}(t_{s1})$,从中计算方位角 ψ_{s1} ;

⑦以 θ_{s0} 、 γ_{s0} 和 ψ_{s1} 构造姿态矩阵 $\tilde{\mathbf{C}}_b^n(t_{s2})$,参考步骤⑤,进行第二次罗经方位对准。

反复⑥—⑦步骤,可获得一系列对准姿态矩阵为 $\tilde{\mathbf{C}}_b^n(t_{ek})$,直至方位对准结果逐渐收敛,整个对准过程参见示意图 2-10。

在第 2.3.3 节的四个阶段中罗经方位对准阶段④需要最长时间,从上述设计步骤可以看出,改进捷联罗经对准方法的最短对准时间可以缩短至罗经方位对准时间内,而其它阶段均可利用同样的采样数据来实现。如果初始方位误差比较大,经典罗经方位对准往往需要经过多个振荡周期才能收敛,对准时间长,但是应用

⑥—⑦步骤通过反复对准，只需要一个罗经方位对准振荡周期的采样数据即可，从而最终将捷联罗经对准时间缩短到罗经方位对准的一个振荡周期内。当然，根据实际情况还可设计出其它对准方案，例如步骤⑥就可利用逆向罗经方位对准来代替逆向姿态解算，图 2-11 也是一例快捷的时序设计方案，图中虚线部分表示同时进行解算之意。

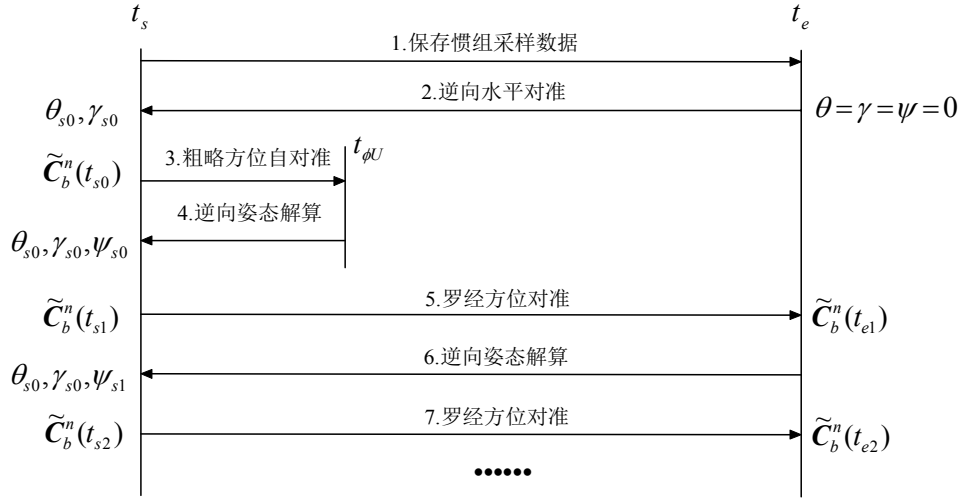


图 2-10 快速捷联罗经初始对准时序安排示意图 1

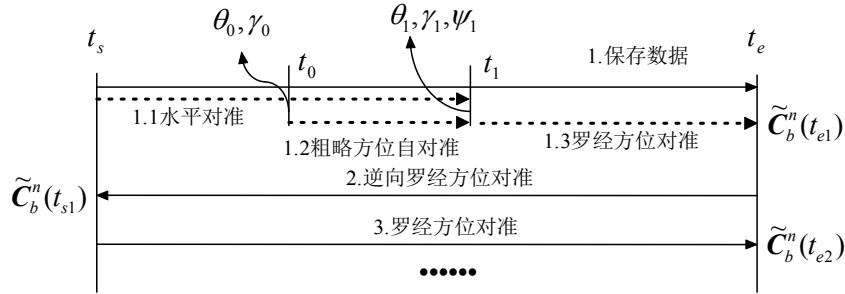


图 2-11 快速捷联罗经初始对准时序安排示意图 2

2.3.5 快速捷联罗经初始对准试验

采用激光捷联惯组作捷联罗经初始对准试验，其中激光陀螺随机漂移稳定性为 $0.01^\circ/\text{h}$ ，加速度计零偏稳定性为 $5 \times 10^{-5} \text{g}$ 。

将捷联惯组安装在载车上，上电预热准备好后，载车先保持静止 300s，之后，试验人员进行开关车门、上下车和车上走动等活动，施加干扰 300s，将上述共计 600s 的陀螺和加速度计采样数据存盘，作事后处理。事后处理分两种算法：

①取从 0s 到 300s 的原始数据，利用传统卡尔曼滤波初始对准方法作初始对准，随后从 300s 到 600s 进行姿态跟踪解算，姿态跟踪阶段捷联惯导的方位角将

作为罗经法对准结果比较的参考基准；

②利用从 300s 到 600s 的数据，按图 2-10 的步骤进行罗经初始对准试验，由粗略方位自对准结果知方位误差约为 3° ，罗经方位对准共反复执行了四次，每次罗经方位对准与捷联惯导姿态跟踪之间的方位误差如图 2-12 所示，其中曲线上的数字表示第几次罗经方位对准误差。

从图中可以看出，第三次罗经方位对准的误差已经比较小，小于 0.02° ，达到方位对准精度要求，第四次方位对准时误差已基本不再减小。如果以改进快速对准方法的三次罗经方位对准时间计算，则采用常规罗经对准方法至少需要 15min 才能完成初始对准，而本试验只需 5min 的采样数据，所以改进罗经初始对准方法可以有效缩短对准时间。当然，与常规罗经对准方法相比，如果采用变参数的罗经方位对准也可以减小对准时间，即在对准前期选用振荡周期短的参数，而在后期使用周期长的参数^[2]，前期选用短振荡周期参数的主要目的在于迅速降低可能存在的较大初始方位误差角，但是此时精度不高且抗环境干扰能力差，最终的方位精度依然主要取决于对准的后期过程，因此本试验对准方法亦优于变参数方法。

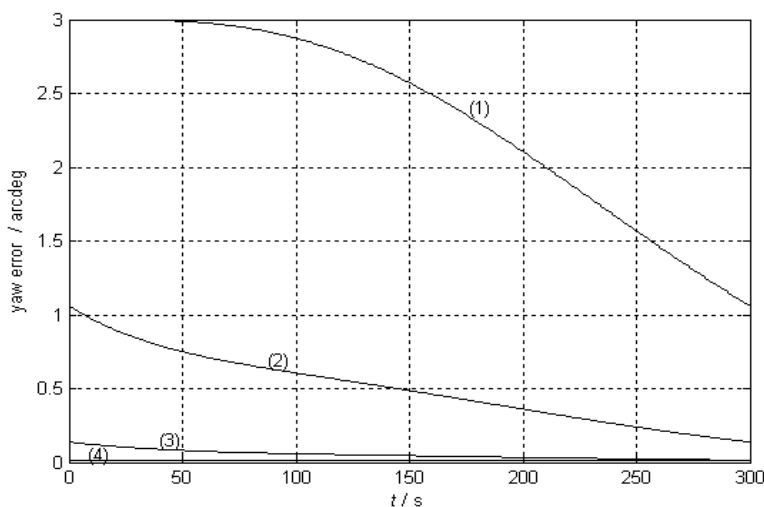


图 2-12 捷联罗经对准试验的方位误差

2.4 捷联罗经动基座初始对准与导航

2.4.1 捷联罗经动基座初始对准原理及算法

通过引入外界参考速度 $\mathbf{v}_R^n = [v_{RE}^n \quad v_{RN}^n \quad v_{RU}^n]^T$ ，可将捷联罗经对准算法图 2-7~图 2-9 扩展至动基座情形，现以水平对准东向通道为例，将图 2-7 改造为图 2-13，图 2-13 的数学平台部分还考虑了参考速度引起导航系旋转的影响 ω_{en}^n ，

$$\mathbf{v}_{Nk}^n = \mathbf{v}_{Nk-1}^n + (\tilde{f}_{sfNk}^n - K_{N1} \delta \mathbf{v}_{Nk}^n) T_s \quad (2-29b)$$

$$\delta p_{Nk} = \delta p_{Nk-1} + K_{N3} \delta v_{Nk}^n T_s \quad (2-29c)$$

$$\omega_{cEk} = -\delta v_{Nk}^n (1 + K_{N2}) / R_e - \delta p_{Nk} \quad (2-29d)$$

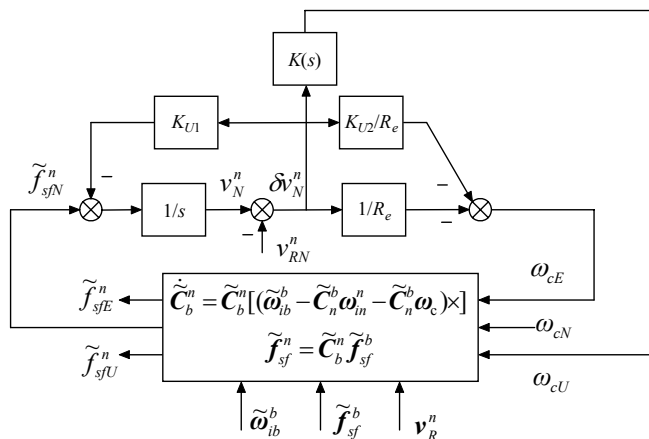


图 2-15 动基座捷联罗经方位对准

$$\delta v_{Nk}^n = v_{Nk-1}^n - v_{RNk}^n \quad (2-30a)$$

$$\mathbf{v}_{N_k}^n = \mathbf{v}_{N_{k-1}}^n + (\tilde{f}_{stN_k}^n - K_{UJ} \delta \mathbf{v}_{N_k}^n) T_s \quad (2-30b)$$

$$\omega_{cEk} = -\delta v_{Nk}^n (1 + K_{U2}) / R_e \quad (2-30c)$$

$$\omega_{cUlk} = (K_{U3} \delta v_{Nk}^n T_s / \omega_N + \omega_{cUlk-1}) / (1 + K_{U4} T_s) \quad (2-30d)$$

2.4.2 捷联罗经动基座初始对准步骤

与静态捷联罗经初始对准稍有不同，将动基座捷联罗经初始对准划分为以下三个步骤。

①方位角未知情况下的水平对准

为了后文描述方便, 以下用 $\mathbf{C}_b^n(\theta, \gamma, \psi)$ 表示由俯仰角 θ 、横滚角 γ 和方位角 ψ 构成的姿态矩阵 $\mathbf{C}_b^n$ 。

在方位角完全未知情况下,不妨将它的初始设置值假设为零,又因为载车和舰船等运载体在初始对准过程中水平姿态角通常不大,所以可以假设两个水平姿态角初始设置值也为零。先初始化捷联罗经姿态矩阵为 $\mathbf{C}_b^n(0,0,0)$,由东向和北向通道一起共同构成水平对准方案,外界参考速度一般是相对于运载体坐标系 b 系而言的,而不是在导航系 n 系下的投影,例如车载里程计输出或舰船的多普勒

测速仪输出。由于方位角完全未知，方位误差角可能比较大，此时可将地球自转角速率等效为陀螺漂移，作为水平对准的干扰量，通过分析三阶水平对准回路易知，地球自转干扰不影响水平对准的精度，稳态精度仍然取决于加速度计零偏误差。虽然外界参考速度噪声一般比较大，通过罗经水平对准图 2-13 和图 2-14 后往往可以获得比较平滑和准确的水平姿态角（俯仰角 θ 和横滚角 γ ）、并且还有运载体速度。

例如，利用激光捷联惯导系统作跑车试验，由里程计提供速度参考信息，里程计的刻度因子 $K_{OD} \approx 0.082\text{m/脉冲}$ ，惯导坐标系与车体坐标系之间的安装误差已经过标定和补偿^[40]。先进行 5min 的静基座初始对准，对准完毕后紧接着进行纯惯性导航，再启动载车进入行驶状态，在行驶状态下除纯惯导外同时实施方位角未知情况下的水平对准，以纯惯导信息（姿态矩阵 $\mathbf{C}_{bINS}^{n'}$ 、速度 $\mathbf{\hat{v}}_{INS}^n$ ）为参考基准评价罗经水平对准的性能。由于里程计提供的是相对于车体坐标系的速度信息，因此需利用计算捷联罗经姿态矩阵 $\mathbf{C}_{bCPS}^{n'}$ 转换至导航系，然而由于此时的方位角完全未知，转换后的速度只能是名义上的东向和北向速度量。设里程计输出速度

$$\mathbf{v}_{OD}^b = [0 \quad K_{OD}N_k/T_s \quad 0]^T \quad (2-31)$$

其中 T_s 为采样周期， N_k 为一个周期内输出的里程计路程增量脉冲数。以 $\mathbf{C}_{bCPS}^{n'}(0,0,0)$ 为罗经水平对准姿态初值、 $\mathbf{v}_{OD}^{n'} = \mathbf{C}_{bCPS}^{n'}\mathbf{v}_{OD}^b$ 为参考速度，并选择阻尼时间参数 $T_d=100\text{s}$ ，为了便于比较罗经对准与纯惯导在运载体系下的速度，进行坐标变换

$$\mathbf{v}_{CPS}^b = \mathbf{C}_{bCPS}^{n'}\mathbf{v}_{CPS}^{n'}, \quad \mathbf{v}_{INS}^b = \mathbf{C}_{bINS}^{n'}\mathbf{v}_{INS}^{n'} \quad (2-32)$$

其中 $\mathbf{v}_{CPS}^b = [\mathbf{v}_{CPS,R}^b \quad \mathbf{v}_{CPS,F}^b \quad \mathbf{v}_{CPS,U}^b]^T$ 、 $\mathbf{v}_{INS}^b = [\mathbf{v}_{INS,R}^b \quad \mathbf{v}_{INS,F}^b \quad \mathbf{v}_{INS,U}^b]^T$ 分别为罗经和纯惯导在运载体系下的速度，下标 R, F, U 分别表示车体系的右、前和上方向。

图 2-16 和图 2-17 显示的是方位角未知情况下的罗经水平对准试验结果，其中蓝色实线为纯惯导输出，红色点划线为罗经输出，图 2-17 右边部分紫色虚线为里程计 1s 平均的速度输出。从图中可以看出，经过 100s 左右的调节期后罗经姿态与纯惯导姿态重合很好（误差小于 $1'$ ），速度图中纯惯导速度缓慢发散，在 500s 后载车停止但纯惯导速度并不为零。见图 2-17 右边部分，在载车行驶时罗经速度和里程计 1s 平均速度能较好跟随纯惯导速度变化，并且在载车停止时，罗经速度和里程计 1s 平均速度迅速衰减为 0，但是放大的小图中显示里程计 1s 平均速度噪声比较大，若把 1s 的平滑时间适当增长有利于降低噪声，不过当载车速度剧烈变化时它会带来严重相位延迟的负面效应，当里程计当量比较大或里

程计机械联接软轴的扭转刚度不足时,平均速度法在精度和相位延迟之间的矛盾会更加突出,往往难以权衡使之均得到满意的结果。因此,罗经水平对准法是求得运载体系速度的一种比较理想的方法,它综合了里程计测量长期稳定性强和惯导动态范围宽的优点,即具备测量不发散、实时性好和精度高等特点。从图 2-16 中姿态角精度可以想到,罗经水平对准法还适合应用于确立水平基准或垂直基准,亦具备精度高和长期稳定性好的特点。

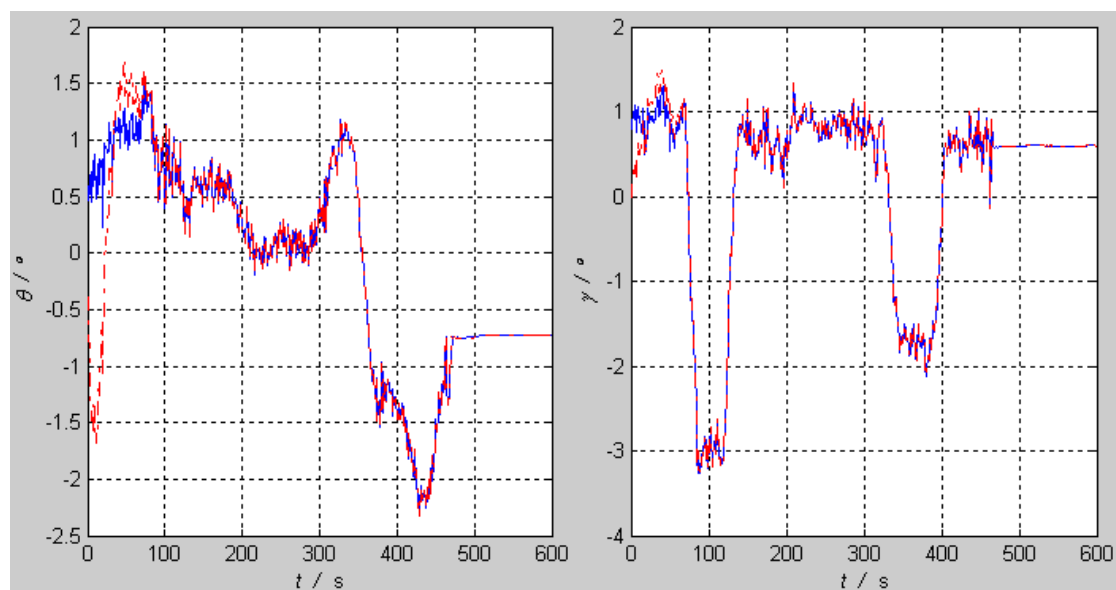


图 2-16 俯仰角和横滚角

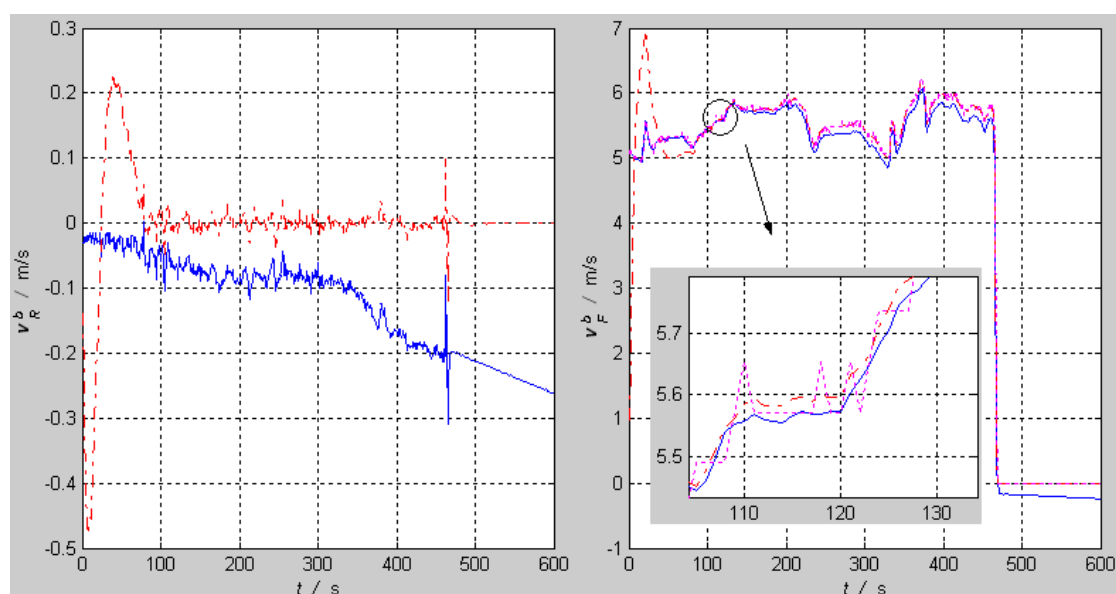


图 2-17 载车右向和前向速度

事实上,通过前面的分析不难发现,如果以右向陀螺、前向加速度计和里程计测量构成前向水平对准通道,以前向陀螺、右向加速度计和车体右向速度为零(转弯时在零附近波动)的约束条件构成右向水平对准通道,也可得到精度与图 2-16 和图 2-17 一样的试验结果。

进一步的试验还发现,如果惯组与里程计之间的杆臂补偿不充分,或者当转弯过程中车轮转向定理的规律性有偏差时,则转弯条件下右向通道参考速度为零的条件被破坏,将导致横滚角和右向速度计算误差稍微变大,如加大阻尼振荡周期 T_d 会降低误差幅值,但是增长了对准时间。这也从一个侧面反映了,要在短时间内实现动基座对准,结果水平姿态误差可能比较大,如再以此水平信息进行纯惯性导航,纯惯导误差必然发散很快。一般的应用中(在重力场下并且水平加速度过载不大时),SINS/测速仪或 SINS/GPS 组合导航一段时间之后,如断开外界参考信息,再进行纯惯性导航,会发现此时的纯惯导定位精度往往不如利用静基座条件对准后的纯惯导定位精度高,其中一个重要原因就在于前者水平对准精度不如后者高(虽然前者方位精度可能高于后者,但是纯惯导初期的水平姿态误差比方位误差对速度误差的影响更直接和严重)。

②粗略方位自对准

在第四章典型的大方位失准角速度误差方程(4-19)式中,它的参考速度是 n 系的真实速度 $\mathbf{v}^n$,该速度误差方程常应用于这两种场合:大方位失准角静基座初始对准或大方位失准角 SINS/GPS 组合初始对准,前一场合中 n 系参考速度已知且恒为零,后一场合由 GPS 实时提供 n 系的参考速度。而在本章捷联惯导与里程计构成的系统中,尚未初始对准之前,无法得到 n 系参考速度,至多只能由里程计提供 b 系下的速度,前面说过利用捷联罗经水平对准能提供比较准确的 b 系速度,所以下面就利用该速度作为真值参考,推导大方位角下(ϕ_U 任意而 ϕ_E 和 ϕ_N 为小量)方位失准角与纯惯导速度误差之间的近似关系。

将捷联惯导比力方程

$$\dot{\mathbf{v}}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}_{sf}^b - (\boldsymbol{\omega}_{in}^n + \boldsymbol{\omega}_{ie}^n) \times \mathbf{v}^n + \mathbf{g}^n$$

作坐标变换,投影至 b 系(推导过程可详见第三章 3.2.2 小节(3-15)式),得

$$\dot{\mathbf{v}}^b = \mathbf{f}_{sf}^b - (\boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \mathbf{C}_n^b \boldsymbol{\omega}_{ie}^n) \times \mathbf{v}^b + \mathbf{C}_n^b \mathbf{g}^n \quad (2-33)$$

而(2-33)式在实际计算时采用

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}}^b = \tilde{\mathbf{f}}_{sf}^b - (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \mathbf{C}_n^b \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n) \times \tilde{\mathbf{v}}^b + \mathbf{C}_n^b \tilde{\mathbf{g}}^n \quad (2-34)$$

不记重力误差、加速度计比力和陀螺角速度测量误差,并忽略 $\mathbf{C}_n^b \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n$ 和 $\mathbf{C}_n^b \boldsymbol{\omega}_{ie}^n$ 的

影响，将（2-34）式减去（2-33）式，得速度误差

$$\begin{aligned}\delta\dot{\mathbf{v}}^b &= \tilde{\mathbf{v}}^b - \dot{\mathbf{v}}^b \approx -\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times \delta\mathbf{v}^b + (\mathbf{C}_{n'}^b - \mathbf{C}_n^b)\mathbf{g}^n \\ &= \mathbf{C}_{n'}^b[-\mathbf{C}_b^{n'}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times \delta\mathbf{v}^b) + (\mathbf{I} - \mathbf{C}_n^{n'})\mathbf{g}^n]\end{aligned}\quad (2-35)$$

整理得

$$\mathbf{C}_b^{n'}\delta\dot{\mathbf{v}}^b + \mathbf{C}_b^{n'}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times \delta\mathbf{v}^b) = (\mathbf{I} - \mathbf{C}_n^{n'})\mathbf{g}^n$$

即

$$\mathbf{C}_b^{n'}\delta\dot{\mathbf{v}}^b + \mathbf{C}_b^{n'}(\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times)\delta\mathbf{v}^b + \mathbf{C}_b^{n'}(\boldsymbol{\omega}_{in}^b \times)\delta\mathbf{v}^b = (\mathbf{I} - \mathbf{C}_n^{n'})\mathbf{g}^n \quad (2-36)$$

考虑到

$$\delta\dot{\mathbf{v}}^{n'} = d(\mathbf{C}_b^{n'}\delta\mathbf{v}^b)/dt = \mathbf{C}_b^{n'}(\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times)\delta\mathbf{v}^b + \mathbf{C}_b^n\delta\dot{\mathbf{v}}^b \quad (2-37)$$

同理 $\boldsymbol{\omega}_{in}^b$ 是个小量忽略其影响，因此（2-36）式可近似为

$$\delta\dot{\mathbf{v}}^{n'} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}_n^{n'})\mathbf{g}^n \quad (2-38)$$

将第四章的（4-22）式变换矩阵 $\mathbf{C}_n^{n'}$ 各元素代入（2-38）式，展开并只取前两分量得

$$\delta\dot{v}_E^{n'} = -g\phi_N \quad (2-39a)$$

$$\delta\dot{v}_N^{n'} = g\phi_E \quad (2-39b)$$

由此可见，计算坐标系下的东向速度是北向姿态误差的线性函数，北向速度与东向姿态误差也成比例关系，它与静基座速度误差（2-24）式形式上完全一样。

根据大方位失准角误差方程（4-26a）式简化，即忽略陀螺漂移和 $\boldsymbol{\omega}_{en}^n$ 影响，近似有

$$\dot{\phi}_E \approx -\sin(\phi_U)\omega_N + \phi_N\omega_U \quad (2-40a)$$

$$\dot{\phi}_N \approx (1 - \cos\phi_U)\omega_N - \phi_E\omega_U \quad (2-40b)$$

$$\dot{\phi}_U \approx \phi_E \cos(\phi_U)\omega_N \quad (2-40c)$$

由于水平误差角 ϕ_E 和 ϕ_N 是小角度，进一步近似得

$$\dot{\phi}_E \approx -\sin(\phi_U)\omega_N \quad (2-41a)$$

$$\dot{\phi}_N \approx (1 - \cos\phi_U)\omega_N \quad (2-41b)$$

$$\dot{\phi}_U \approx 0 \quad (2-41c)$$

将 (2-39) 式再微分一次并将 (2-41) 式代入, 建立速度误差与大方位误差角 ϕ_U 之间的关系

$$\delta \dot{\mathbf{v}}_E^{n'} \approx g \omega_N (\cos \phi_U - 1) \quad (2-42a)$$

$$\delta \dot{\mathbf{v}}_N^{n'} \approx -g \omega_N \sin \phi_U \quad (2-42b)$$

注意, 结论 (2-42) 式与 (2-25) 式在形式上完全相同, 从误差定义和推导过程可以看出, 前者 (2-42) 式速度误差以真值速度在计算坐标系 n' 系投影为参考基准, 而后者 (2-25) 式是以 n 系投影的真值零速度为参考基准, 在本章 b 系辅助动基座对准且方位角未知时, n 系投影的真值速度不可知, 因此 (2-42) 式适用于近似已知 b 系参考速度的动基座速度误差特性 (静基座可视为特例), 而 (2-25) 式原则上只适用于静基座情况。

根据阶段水平对准①的分析, 经过水平对准后, 能够满足水平姿态误差比较小和速度精度比较高的要求, 但是还应假设方位误差为大误差角, 设水平对准结束时刻 t_{h1} 获得姿态矩阵 $\mathbf{C}_{bCPS}^{n'}(t_{h1})$ 和速度 $\mathbf{v}_{CPS}^{n'}(t_{h1})$ 。粗略方位自对准阶段中, 将捷联惯导中陀螺和加速度计的采样数据复制成两份拷贝, 并应用两种不同的算法进行解算。一种算法是, 继续①阶段的水平对准, 经过一段时间 (如 2 分钟) 至 $t_{\phi U}$ 时刻, 假设罗经姿态矩阵和速度分别变为 $\mathbf{C}_{bCPS}^{n'}(t_{h1} + t_{\phi U})$ 和 $\mathbf{v}_{CPS}^{n'}(t_{h1} + t_{\phi U})$; 另一种算法是, 在大方位误差角条件下进行捷联惯导速度解算, 近似算法为

$$\dot{\mathbf{C}}_{bINS}^{n'} = \mathbf{C}_{bINS}^{n'} [(\tilde{\omega}_{ib}^b - \mathbf{C}_{n'INS}^b \omega_{ie}^n) \times] \quad (2-43a)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{INS}^{n'} = \mathbf{C}_{bINS}^{n'} \tilde{\mathbf{f}}_{sf}^b - 2\omega_{ie}^n \times \mathbf{v}_{INS}^{n'} + \mathbf{g}^n \quad (2-43b)$$

其中选择姿态矩阵初始值为 $\mathbf{C}_{bINS}^{n'}(0) = \mathbf{C}_{bCPS}^{n'}(t_{h1})$ 和速度初值为 $\mathbf{v}_{INS}^{n'}(0) = \mathbf{v}_{CPS}^{n'}(t_{h1})$, 假设导航至 $t_{\phi U}$ 时刻, 捷联惯导姿态矩阵和速度分别变为 $\mathbf{C}_{bINS}^{n'}(t_{\phi U})$ 和 $\mathbf{v}_{INS}^{n'}(t_{\phi U})$ 。

由 (2-37) 式中速度误差的定义 $\delta \mathbf{v}^{n'} = \mathbf{C}_b^{n'} \delta \mathbf{v}^b$, 进一步将其展开并表示为捷联惯导和罗经速度如下

$$\delta \mathbf{v}^{n'} = \mathbf{C}_b^{n'} \delta \mathbf{v}^b = \mathbf{C}_b^{n'} (\tilde{\mathbf{v}}_{INS}^b - \mathbf{v}_{CPS}^b) = \mathbf{v}_{INS}^{n'} - \mathbf{v}_{CPS}^{n'} \quad (2-44)$$

若记 $\delta \mathbf{v}^{n'}(t) = [\delta \mathbf{v}_E^{n'}(t) \quad \delta \mathbf{v}_N^{n'}(t) \quad *]^T = \mathbf{v}_{INS}^{n'}(t) - \mathbf{v}_{CPS}^{n'}(t_{h1} + t)$ 。一方面由水平误差角 ϕ_E 和 ϕ_N 初始值很小和 (2-39) 式, 近似得 $\delta \dot{\mathbf{v}}_E^{n'}(0) = \delta \dot{\mathbf{v}}_N^{n'}(0) = 0$; 另一方面考虑到罗经水平对准提供的速度准确, 即有 $\delta \mathbf{v}_E^{n'}(0) = \delta \mathbf{v}_N^{n'}(0) = 0$ 。有了这两个状态初始值, 最后根据 (2-42) 式作二次积分并移项, 可得

$$\cos \phi_U = 2\delta \mathbf{v}_E^{n'}(t_{\phi U}) / (g \omega_N t_{\phi U}^2) + 1 \quad (2-45a)$$

$$\sin \phi_U = -2\delta v_N^n(t_{\phi U}) / (g\omega_N t_{\phi U}^2) \quad (2-45b)$$

至此，构造修正矩阵

$$\mathbf{C}_{\phi U} = \begin{bmatrix} \cos \phi_U & -\sin \phi_U & 0 \\ \sin \phi_U & \cos \phi_U & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对 $\mathbf{C}_{bINS}^{n'}(t_{\phi U})$ 作一次修正，即

$$\tilde{\mathbf{C}}_{bINS}^{n'}(t_{\phi U}) = \mathbf{C}_{bINS}^{n'}(t_{\phi U}) \mathbf{C}_{\phi U} \quad (2-46)$$

此时， $\tilde{\mathbf{C}}_{bINS}^{n'}(t_{\phi U})$ 中包含粗略的方位角 ψ_{INS} ，但是其中俯仰角横滚角的误差可能比较大，反而是在 $\mathbf{C}_{bCPS}^{n'}(t_{h1} + t_{\phi U})$ 中包含准确的俯仰角 θ_{CPS} 和横滚角 γ_{CPS} 信息，因此可以使用这种方式来构造后续对准阶段的姿态矩阵初值： $\mathbf{C}_b^{n'}(\theta_{CPS}, \gamma_{CPS}, \psi_{INS})$ 。

③罗经方位对准

具备水平和粗略方位对准后，便可利用图 2-13 东向通道和图 2-15 罗经方位通道共同进行罗经方位对准。

值得指出的是，图 2-13~图 2-15 中的外界参考速度理论上是相对于导航坐标系 n 系的准确速度，而实际应用时参考速度往往是在运载体坐标系 b 系下测量的，由于 b 系下的速度测量误差和罗经方位对准过程中方位角也存在误差，致使参考速度从 b 系至 n 系的坐标变换过程中会引起等效的东向和北向速度误差，更细致的分析还可以考虑这些误差对罗经方位对准精度的影响。在航海陀螺罗经理论中分析指出：运载体等效东向速度误差不影响方位对准精度，而等效北向速度误差分量 δv_N^n 影响罗经方位对准精度 ϕ_U ，它们之间的关系可以用公式表示成^[25]

$$\phi_U = \frac{\delta v_N^n}{5\pi} \sec L \quad (2-47)$$

其中 δv_N^n 的计量单位为 kn (kn-节, 1kn=1 海里/h $\approx$ 0.515m/s)， ϕ_U 的计量单位为 $^\circ$ 。例如当方位精度取 $\phi_U = 0.1^\circ \times \sec(L)$ 时，则 $\delta v_N^n = 0.1 \times 5\pi \approx 1.57\text{kn}$ 。再假设运载体行驶速度 20kn，参考速度相对测量误差为 0.1%，并且初始罗经方位误差为 $\phi_U = 1^\circ \times \sec(L)$ ，则按勾股定理估计等效北向速度误差最大值为 $\delta v_N^n = 20\text{kn} \times \sqrt{(0.1\%)^2 + (1^\circ)^2} \approx 0.35\text{kn}$ ，其可能造成的罗经方位对准误差为 $\phi_U = 0.35 / (5\pi) \times \sec(L) \approx 0.02^\circ \times \sec(L)$ ，这对于惯性级导航系统而言，参考速度造成的罗经方位对准误差基本可以忽略不计。但是当运载体速度很大时，如飞机飞行时一般可达 200m/s，则采用 b 系下的参考速度辅助，如无线电测速雷达，进行初始对准将会产生比较大的方位误差，这是罗经方位对准法难以在高速运载体上应用的一

个原因。然而，如果参考速度是相对于 n 系而言的，如采用 GPS 速度信息，就不存在上述速度坐标转换原理上的误差了。

此外再说明一点，初始纬度装订误差也会引起罗经方位对准误差，但是相同的纬度误差造成的方位对准误差随运载体所处纬度不同而不同。图 2-18 显示的是在 1° 纬度误差下所处纬度与方位对准误差之间的关系^[18]。例如在纬度 30° 处，假设罗经方位对准过程中纬度装订误差为 0.1° ，通过图中曲线查得横坐标 30° 时对应的纵坐标约为 0.03° ，因而求得纬度误差 0.1° 引起的方位对准误差为 $0.1 \times 0.03^\circ \times \sec(30^\circ) = 0.0035^\circ$ ，如此小的误差完全可以忽略不计。因此，在罗经方位对准过程中可以不必进行运载体位置更新（显然，在水平对准和方位粗对准期间方位未知，也无法实施正确的位置更新），在对准算法中始终以初始纬度代替所需真实纬度，能够获得较好的方位对准效果。

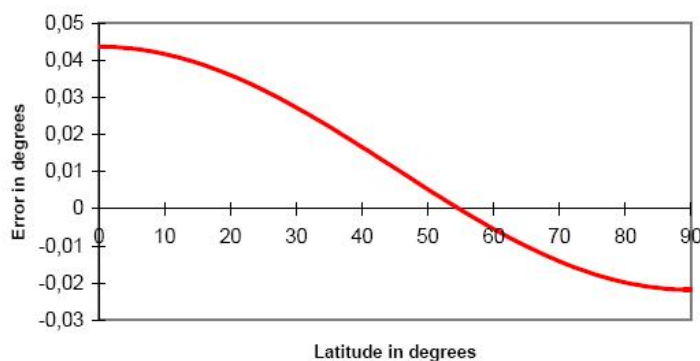


图 2-18 不同纬度处 1° 纬度误差引起的方位对准误差

实际上，由于在罗经方位对准期间具备一定的方位精度，如果借助于东向通道控制律中的速度 v_E^n 和北向通道速度 v_N^n ，则可进行粗略的动基座下运载体水平位置更新解算，实现该阶段位置变化的近似补偿。

2.4.3 动基座初始对准中的位置导航

前面说过，在动基座初始对准过程中，特别是在水平对准和方位粗对准期间，由于方位角未知，无法进行正确的位置导航，虽然动基座对准过程中运载体运动引起的位置误差对捷联罗经初始对准影响不大，但是，如果要进行运载体定位的话，该误差往往不能忽略，例如运载体以 5m/s 的速度行驶，则 10min 的对准过程将可能造成 3km 的位置误差，因此，有必要在初始对准之后利用逆向导航技术再进行一次精确的位置导航解算，过程叙述如下：

①进行捷联罗经动基座初始对准，对准结束时获得姿态矩阵 $\tilde{\mathbf{C}}_b^n(t_e)$ ，并将从对准起始时刻 t_s 至结束时刻 t_e 的陀螺、加速度计和辅助参考速度采样数据存储下

来；

②以 $\tilde{\mathbf{C}}_b^n(t_e)$ 为姿态矩阵初值，并不妨以 t_s 时刻的运载体位置为位置初值，进行逆向航位推算，从 t_e 时刻逆向导航解算至 t_s 时刻，获得 t_s 时刻姿态矩阵 $\tilde{\mathbf{C}}_b^n(t_s)$ ；

③以 $\tilde{\mathbf{C}}_b^n(t_s)$ 为姿态矩阵初值，并以 t_s 时刻的运载体位置为位置初值，进行正向航位推算，从 t_s 时刻导航解算至 t_e 时刻，便可得到 t_e 时刻的运载体位置 $\mathbf{P}(t_e)$ ，最终达到位置导航的目的。

利用以上三个步骤，即能实现动基座姿态矩阵初始对准，又能求得对准过程中的运载体位置，捷联罗经动基座初始对准与位置导航时序安排如图 2-19 所示。

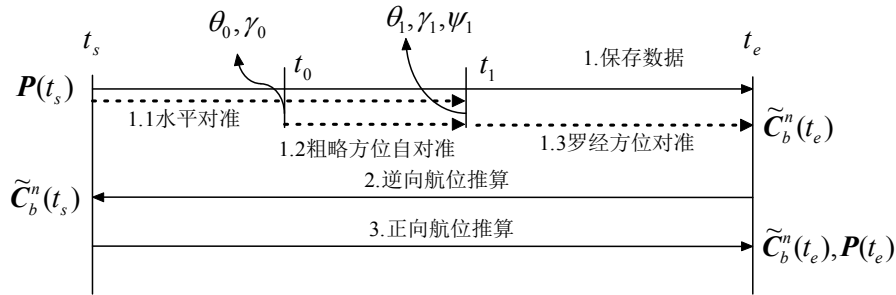


图 2-19 初始对准与位置导航时序安排示意图

但是需要指出的是，该方法不能实时计算运载体在对准过程中的位置，而只能获得事后处理的位置。此外，还必须根据导航计算机数据处理能力的强弱，在 t_e 时刻之后继续实施一小段时间的采样数据存储，以备在导航计算机处理完过程③之后进行导航使用，也就是说，必须在 t_e 时刻后再经历一小段时间才能提供实时的导航信息。

2.4.4 车载动基座初始对准与导航试验

2007 年 7 月 16 日~18 日在西安航天时代电子仪器公司第十六研究所附近进行了动基座初始对准试验，试验设备主要包括：激光捷联惯组、里程计、高精度 GPS 接收机、载车、导航计算机及相关电源等，其中激光陀螺漂移误差约为 $0.007^\circ/\text{h}$ ，加速度计零偏误差约为 $5 \times 10^{-5}g$ ，里程计输出脉冲当量为 $0.08194\text{m}/\text{脉冲}$ 。里程计的测量为动基座初始对准提供参考速度输入，利用 GPS 进行对准起始位置装订和作为对准结束时导航位置比较的参考，但在初始对准过程中间 GPS 不起作用。若要在载车运动中实时考察动基座初始对准的精度存在比较大的困难，因此，设计了如下六步骤的动基座初始对准试验和精度评估方案：

①捷联惯组预热准备好后，运行初始对准程序，接收 GPS 位置作为起始位置，开始存储陀螺、加速度计和里程计采样数据，并进入水平对准。

②启动载车，水平对准大约 1min，接着进行 1min 粗略方位自对准，以此时的粗略姿态矩阵和初始位置为初值，并利用前面 2min 的存储数据作逆向航位推算至起始点，求得起始点粗略姿态矩阵；

③以起始点粗略姿态矩阵为初值进行罗经方位对准，整个对准过程中可不停车，载车行驶速度约为 5~8m/s，总里程大约 4km；

④行驶至 10min 时停车，对准程序完成罗经方位对准解算后，以 10min 时的姿态矩阵和初始位置为初值，并利用前面 10min 的存储数据再作逆向航位推算至起始点，求得起始点精确姿态矩阵；

⑤以起始点精确姿态矩阵和初始位置为初值，并利用存储数据作正向航位推算至当前点，记录下捷联惯导的方位角 ψ 、航位推算的经度 λ 和纬度 L ，把它们当作捷联罗经初始对准的方位和位置结果，结束初始对准程序；

⑥保持载车不动，记录此时 GPS 输出的经度 λ' 和纬度 L' ，并利用常规对准方法进行一次 5min 静基座初始对准，记下对准方位角为 ψ' ，将这些值作为捷联罗经初始对准的方位和位置比较参考基准。

总共进行了六组试验，结果如表 2-1 所示。在其它试验中已经测得该套惯导设备的静基座初始对准方位精度优于 $2'$ ，因此可以认为表 2-1 中方位误差主要是由捷联罗经初始对准引起的，其均方差约 0.112° (1σ)；此外，导航位置的经度和纬度误差也比较小，经度误差为 1.67m，纬度误差为 4.50m，相对于载车总行驶里程而言，相对位置误差约为 0.1%。该试验表明，所提初始对准方法在完成捷联矩阵初始对准的同时，还具备了精确位置导航的能力。

表 2-1 初始对准试验结果

组别	方位对准及误差 /°			经度导航及误差			纬度导航及误差		
	ψ	ψ'	误差	$\lambda/^\circ$	$\lambda'/^\circ$	误差/m	$L/^\circ$	$L'/^\circ$	误差/m
1	50.920	50.839	0.081	109.017576	109.017559	1.61	34.184918	34.184957	-4.30
2	263.816	263.727	0.089	108.984471	108.984491	-1.77	34.174686	34.174644	4.73
3	51.881	52.038	-0.157	109.017497	109.017532	-3.14	34.185006	34.184932	8.33
4	263.212	263.181	0.031	108.983486	108.983493	-0.62	34.174551	34.174536	1.69
5	50.888	51.016	-0.128	109.016814	109.016841	-2.47	34.184534	34.184473	6.85
6	265.135	265.052	0.083	108.982266	108.982284	-1.61	34.174467	34.174426	4.61
统计误差(1 σ)			0.112			1.67			4.50

2.5 本章小结

本章比较详细地推导了逆向导航算法。在分析经典平台罗经初始对准的原理

的基础上,提出了捷联罗经初始对准算法。在罗经方位对准中,较大的初始方位误差角一般将导致罗经方位收敛过程中振荡次数较多,但是对准精度往往只取决于后期的振荡收敛精度,因此,若借助于逆向导航算法和 SINS 数学平台多样性的特点,在罗经方位对准的前期和后期还可以利用相同的采样数据序列,先进行降低初始方位误差处理,再进行具有精度决定性的方位对准,有利于进一步缩短初始对准时间。此外,应用捷联罗经方法进行动基座初始对准,并借助于逆向导航算法,既能够完成初始对准又能够实现运载体运动的位置导航,为 SINS 动基座初始对准提供了一个崭新的思路,特别在军事应用中具有重要的参考价值。同样的道理,在应用最优估计方法的卡尔曼滤波算法中,滤波初值选择一般会影响滤波收敛速度,粗大的初始值会导致收敛变慢,若将逆向导航算法应用于捷联惯导卡尔曼滤波精对准中,也存在节省粗对准时间和进一步缩短精对准时间的余地。

附录：惯性器件斜坡性误差对初始对准精度的影响

在静基座下,以 SINS 静态导航速度误差 $\delta \mathbf{v}^n$ 作为观测量进行卡尔曼滤波估计,其小失准角条件下的姿态和速度误差方程分别为

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = -\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \boldsymbol{\phi} - \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^n \quad (\text{A1a})$$

$$\delta \dot{\mathbf{v}}^n = \mathbf{f}_{sf}^n \times \boldsymbol{\phi} + \delta \mathbf{f}_{sf}^n \quad (\text{A1b})$$

其中 $\boldsymbol{\phi} = [\phi_E \quad \phi_N \quad \phi_U]^T$, $\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^n$ 为等效在 n 系投影的陀螺测量误差, $\delta \mathbf{f}_{sf}^n$ 为等效加速度计测量误差。假设陀螺测量误差是常值漂移误差 $\boldsymbol{\varepsilon}^n$ 与斜坡漂移误差 $\boldsymbol{\varepsilon}'^n$ 之和,形式上记为 $\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^n = \boldsymbol{\varepsilon}^n + \int \boldsymbol{\varepsilon}'^n$, 并且加速度计测量误差是常值零偏 ∇^n 与斜坡零偏 ∇'^n 之和,即 $\delta \mathbf{f}_{ib}^n = \nabla^n + \int \nabla'^n$ 。静基座下近似有 $\mathbf{f}_{sf}^n = -\mathbf{g}^n = [0 \quad 0 \quad -g]^T$, 展开(A1)式,并且只考虑速度误差的水平分量,得

$$\dot{\phi}_E = \omega_U \phi_N - \omega_N \phi_U - \varepsilon_E^n - \int \varepsilon_E'^n \quad (\text{A2a})$$

$$\dot{\phi}_N = -\omega_U \phi_E - \varepsilon_N^n - \int \varepsilon_N'^n \quad (\text{A2b})$$

$$\dot{\phi}_U = \omega_N \phi_E - \varepsilon_U^n - \int \varepsilon_U'^n \quad (\text{A2c})$$

$$\delta \dot{v}_E^n = -g\phi_N + \nabla_E^n + \int \nabla_E'^n \quad (\text{A2d})$$

$$\delta \dot{v}_N^n = g\phi_E + \nabla_N^n + \int \nabla_N'^n \quad (\text{A2e})$$

由 (A2d) 式和 (A2e) 式移项整理得

$$\phi_N = \frac{-\delta \dot{v}_E^n + (\nabla_E^n + \int \nabla_E'^n)}{g} \quad (\text{A3a})$$

$$\phi_E = \frac{\delta \dot{v}_N^n - (\nabla_N^n + \int \nabla_N'^n)}{g} \quad (\text{A3b})$$

将 (A3b) 式两边再微分一次得

$$\dot{\phi}_E = \frac{\delta \ddot{v}_N^n - \nabla_N'^n}{g} \quad (\text{A4})$$

由 (A2a) 式移项, 并将 (A3a) 式和 (A4) 式代入, 整理得

$$\begin{aligned} \phi_U &= \frac{\omega_U \phi_N - \varepsilon_E^n - \int \varepsilon_E'^n - \dot{\phi}_E}{\omega_N} \\ &= \frac{\omega_U (-\delta \dot{v}_E^n + \nabla_E^n + \int \nabla_E'^n) / g - \varepsilon_E^n - \int \varepsilon_E'^n - (\delta \ddot{v}_N^n - \nabla_N'^n) / g}{\omega_N} \\ &= \left(-\frac{\delta \dot{v}_E^n}{g} \tan L - \frac{\delta \ddot{v}_N^n}{g \omega_N} \right) + \left(\frac{\nabla_E^n + \int \nabla_E'^n}{g} \tan L - \frac{\varepsilon_E^n + \int \varepsilon_E'^n}{\omega_N} - \frac{\nabla_N'^n / g}{\omega_N} \right) \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

至此可知, 由于以速度误差为观测量, 可以假设速度误差及其各阶导数都是已知的, 因此, 从 (A3) 式和 (A5) 式可得三个失准角的极限对准精度分别为

$$\begin{aligned} \phi_{E,Err} &= -\frac{\nabla_N^n + \int \nabla_N'^n}{g}, \\ \phi_{N,Err} &= \frac{\nabla_E^n + \int \nabla_E'^n}{g}, \\ \phi_{U,Err} &= \frac{\nabla_E^n + \int \nabla_E'^n}{g} \tan L - \frac{\varepsilon_E^n + \int \varepsilon_E'^n}{\omega_N} - \frac{\nabla_N'^n / g}{\omega_N} \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

如果不考虑斜坡性误差, 上述结论与文献[6]一致。一般情况下, 对于 $\phi_{U,Err}$ 而言,

捷联惯组中加速度计相对测量精度比较高, $\frac{\nabla_E^n + \int \nabla_E'^n}{g} \tan L$ 项误差比较小可以忽

略不计, $\phi_{U\infty}$ 的主要误差在于 $-\frac{\varepsilon_E^n + \int \varepsilon_E'^n}{\omega_N}$, 而在预热阶段又要求快速对准时, 由

$-\frac{\nabla_N'^n / g}{\omega_N}$ 引起的误差也不容忽视。从数量上看, 1mg/h 的北向加速度计零偏变化

率与 $0.057^\circ/\text{h}$ 的东向陀螺常值漂移等效, 即有 $1\text{mg}/\text{g}/\text{h} \approx 0.057^\circ/\text{h}$ 。

例如, 图 A-1 为某一石英加速度计温控启动阶段输出曲线。试验时使用温控加热表头从室温 (约 22°C) 加热到稳定温度 58°C , 加热过程约 10min, 共计测量 40min。在加速度计反馈回路中串联高精度电阻, 加速度计测量比力输出当量约为 $1\text{g}/1.2\text{V}$, 使用自制的 V/F 采样板和 6 位半高精度电压表同时采集电阻两端电压值。图 A-1 中实线为 V/F 的 10s 平均输出 (业已经过脉冲当量转换)、虚线为电压表读数输出, 由图可见, 在前 10min, 加速速记输出变化约 $[-3.9\text{mV} - (-4.55\text{mV})] \times 1\text{g}/1.2\text{V} \approx 0.54\text{mg}$, 10min 后电压表输出变化很小, 而 V/F 输出还变化了 $[-4.55\text{mV} - (-4.7\text{mV})] \times 1\text{g}/1.2\text{V} \approx 0.13\text{mg}$ 。如果以该加速度计作为北向加速度计, 前十分钟等效为东向陀螺漂移 $0.54\text{mg}/\text{g}/10\text{min} \approx 0.186^\circ/\text{h}$, 而后半小时等效为东向陀螺漂移 $0.13\text{mg}/\text{g}/30\text{min} \approx 0.015^\circ/\text{h}$ 。因此, 该 V/F 采样板还不能满足快速高精度初始对准的要求, 有待于改进。

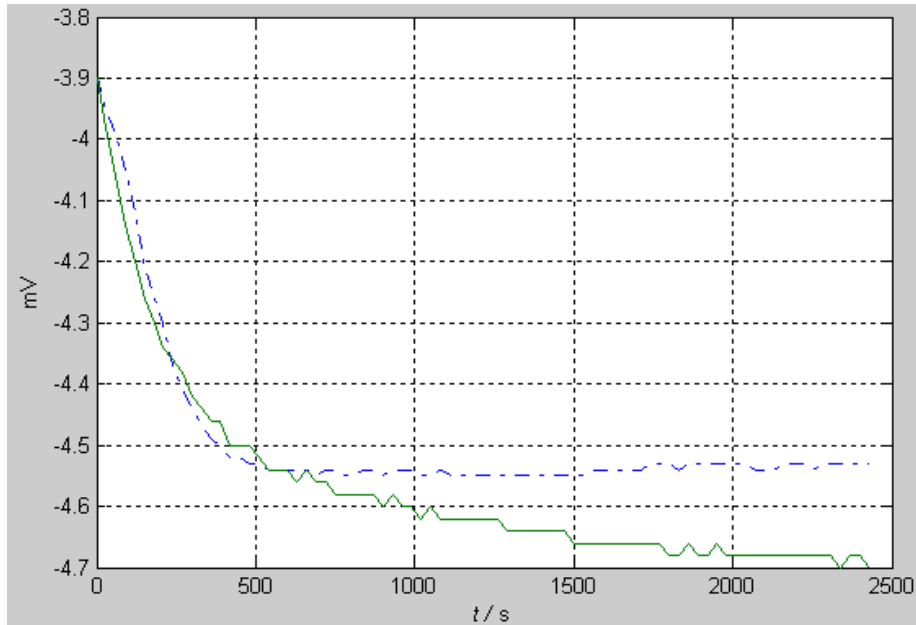


图 A-1 加速度计温控启动阶段输出曲线

不难理解, 如果不使用以速度误差作为观测量的滤波方法, 而将对准时间段内惯性器件测量输出取平均, 再直接利用传统解析式对准方法进行初始对准, 则对准极限误差为

$$\phi_{E,Err} = -\frac{\bar{\nabla}_N^n}{g}, \quad \phi_{N,Err} = \frac{\bar{\nabla}_E^n}{g}, \quad \phi_{U,Err} = \frac{\bar{\nabla}_E^n}{g} \tan L - \frac{\bar{\varepsilon}_E^n}{\omega_N} \quad (A7)$$

其中，符号 $\bar{x}$ 表示对准时间段内测量误差 x 的平均值，由此可见，北向加速度斜坡误差不影响方位对准精度，从某种意义上说（当北向加速度斜坡误差比较大时），静基座下解析式初始对准方法的方位对准精度比滤波法的精度高。

第三章 一种新的动基座初始对准技术

3.1 引言

传统的初始对准过程一般包含两个阶段：粗对准阶段和精对准阶段，精对准阶段在粗对准的基础上，必须假设在事先具备有一定精度的初始粗略姿态信息的条件下才能进行，通过滤波模型估计失准角，也就是说在这些精对准方法中粗对准阶段是必不可少的。在运载体运动的环境下，与运载体角运动相比地球自转角速率很小，传统解析式初始粗对准方法误差大甚至不可用。如何使捷联惯导系统（SINS）在运动条件下，譬如载车行驶中或舰船航行时难以获得粗略初始姿态矩阵条件下，实现精确初始对准是一项非常值得研究的课题。除了上一章研究捷联罗经动基座初始对准外，本章将介绍和研究一种新的动基座初始对准方法。

近年来，一些研究者提出了一种以惯性坐标系作为参考基准进行晃动干扰基座初始对准的新方法^[16-20]，其基本原理是：以陀螺测量输出跟踪惯性坐标系的变化，将加速度计输出在惯性系中投影，当滤除运载体对地加速度影响后，可“观测”到地球自转引起重力加速度 g 在惯性系中缓慢漂移旋转， g 的漂移是在以地球自转轴为主轴的一个锥面内，如图 3-1 所示，最终可从 g 的漂移图中确定出地理北向。本章打算拓展这一思路，研究利用外界速度辅助，无需经过粗对准阶段，直接实现 SINS 动基座精确初始对准的问题，该方法不仅适用于晃动干扰基座还适用于运动基座情况。

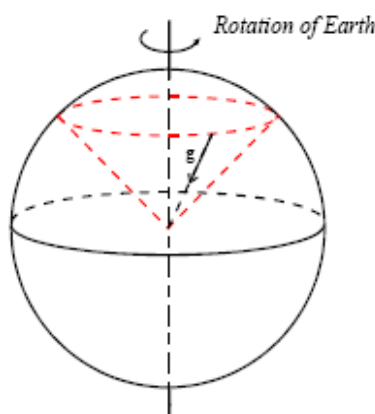


图 3-1 在惯性系中 g 的锥面运动图

很容易证明：在运载体运动状态下，如果没有外界辅助信息，仅靠捷联惯组

自身陀螺和加速度计的测量是不能实现自主初始对准的,至少运动的影响会降低惯导系统初始对准的精度。下面举个简单算例证实运动对初始对准精度的影响。

若以水平速度或位置误差作为观测量进行初始对准,暂且只分析一下 SINS 方位误差与北向速度误差、或方位误差与北向位置误差之间的关系。假设除方位误差角 ϕ_U 外,不考虑其它误差因素的影响,则根据 SINS 误差方程进行简化,在短时间内(如小于 10min)惯导的北向速度误差 δv_N^n 与方位误差角的关系,或纬度误差 δL 与方位误差角的关系可近似表示为

$$\delta v_N^n(t) = -\frac{1}{2} g \omega_{ie} \cos(L) \phi_U t^2 \quad (3-1)$$

$$R_e \delta L(t) = -\frac{1}{6} g \omega_{ie} \cos(L) \phi_U t^3 \quad (3-2)$$

上式说明,北向速度误差与方位误差角成正比并与时间平方成正比,纬度误差与方位误差角成正比并与时间立方也成正比。例如,设 $\phi_U = 1 \text{ mil} = 0.06^\circ = 3.6' \text{ (mil-密位, } 1 \text{ mil} = 2\pi/6000 \text{ rad)}$, $t = 300 \text{ s}$, 则 $\delta v_N^n \approx -0.034 \text{ m/s} \times \cos(L)$, $R_e \delta L \approx -3.4 \text{ m} \times \cos(L)$ 。换言之,例如水面上自由飘浮的船只,若在对准过程的 300s 内船上惯组以极端特殊的匀加加速向北运动 $-3.4 \text{ m} \times \cos(L)$ (或北向速度增加 $-0.034 \text{ m/s} \times \cos(L)$),则在一般对准算法中该运动与方位误差角是无法区分的,即该运动会造成方位误差。实际上,北向匀加加速度与等效北向加速度计的斜坡零偏、或等效东向陀螺漂移类似,它们对方位对准精度影响是相同的(详见第二章附录)。当然如果该运动不是匀加加速的,其对方位对准结果的影响分析起来就比较复杂了。再比如,当 $t = 1800 \text{ s}$ 而其它条件不变时,则 $\delta v_N^n \approx -1.21 \text{ m/s} \times \cos(L)$, $R_e \delta L \approx -725.94 \text{ m} \times \cos(L)$,反过来看,在长时间对准时,只要运载体速度和位置无太大变化,运动对方位对准精度的影响要小得多,其根本原因在于以增长时间为代价平滑运动干扰。由上述分析可见一斑,在动基座下要短时间内提高方位对准精度就必须引入外界辅助措施以测量惯组的运动,对运动量进行补偿,降低或消除运动的影响,并且辅助设备还必须具备一定的测量精度。

运载体运动的常见辅助测量方式主要可划分为两种类型:一种以里程计(或测速仪)为代表,它是相对于载体坐标系输出的;另一种是 GPS 等定位导航系统,它的输出是直接相对导航地理坐标系的。以下分两种情况分别介绍运动辅助测量下动基座初始对准方法。

3.2 里程计辅助动基座初始对准

首先引入一些坐标系的定义和静基座下传统解析式初始对准算法,方便本章

后面介绍动基座对准新算法。

3.2.1 坐标系定义与解析式对准算法

将本章所涉及到的所有坐标系概略介绍如下：

①地心惯性坐标系 (i 系)： ox_i 轴在赤道平面内且指向春分点， oz_i 轴指向地球自转方向，三轴构成右手坐标系；

②地球坐标系 (e 系)： ox_e 轴在赤道平面内且指向中央子午线， oz_e 轴沿地球自转方向，三轴构成右手坐标系， e 系与地球固连， e 系相对于 i 系的转动角速率即为地球自转角速率 ω_{ie} ；

③选取“东-北-天 (E-N-U)”坐标系为导航坐标系 (n 系)；

④定义“右-前-上 (R-F-U)”坐标系为捷联惯导坐标系 (b 系)，或称之为运载体坐标系；

⑤初始时刻惯性坐标系 (i_0 系)：在初始对准起始时刻（即当 $t = t_0 = 0$ 时）， ox_{i_0} 轴在当地子午面内且平行于赤道平面， oz_{i_0} 轴指向地球自转方向，三轴构成右手坐标系，初始对准开始后 i_0 系三轴方向相对惯性空间保持不动；

⑥初始时刻地球坐标系 (e_0 系)：原点为地球中心， ox_{e_0} 轴在赤道平面内且指向初始对准开始时刻的当地子午线， oz_{e_0} 沿地球自转方向，三轴构成右手坐标系， e_0 系也与地球固连，并且 e_0 系与 i_0 系之间方位关系是前者只绕后者的 oz_{i_0} 轴转动了 $\omega_{ie}t$ 角度；

⑦初始时刻导航坐标系 (n_0 系)：把初始对准开始时刻的导航坐标系定义为 n_0 系，它相对地球表面固定不动，即不随捷联惯导在地球表面运动而运动；

⑧初始时刻捷联惯导惯性坐标系 (i_{b_0} 系)：在 t_0 时刻 i_{b_0} 系重合于 b 系，初始对准开始后 i_{b_0} 系不随捷联惯导转动，即在惯性空间中保持指向不变。

传统解析式对准算法如下：

静基座下即捷联惯组静止不动时，加速度计的比力输出 $\tilde{f}_{sf}^b$ 测量的是重力加速度矢量 $\mathbf{g}$ 在 b 系中的投影 $-\mathbf{g}^b$ ，陀螺角速度输出 $\tilde{\omega}_{ib}^b$ 测量的是地球自转角速度矢量 ω_{ie} 在 b 系中的投影 ω_{ie}^b 。当对准地点的地理位置准确已知时，物理量 $\mathbf{g}$ 和 ω_{ie} 在 n 系中的投影 $\mathbf{g}^n$ 和 ω_{ie}^n 也是已知的。由姿态矩阵 $\mathbf{C}_b^n$ 可建立如下两个转换关系式

$$-\tilde{f}_{sf}^b = \mathbf{C}_b^n \mathbf{g}^n \quad \text{和} \quad \tilde{\omega}_{ib}^b = \mathbf{C}_b^n \omega_{ie}^n \quad (3-3)$$

式中 $\mathbf{g}^n = [0 \quad 0 \quad -g]^T$ ， g 为重力加速度大小； $\omega_{ie}^n = [0 \quad \omega_{ie} \cos L \quad \omega_{ie} \sin L]^T$ ， L 为当地地理纬度， ω_{ie} 为地球自转角速率。通过 (3-4) 式可求得初始对准姿态矩

阵 C_b^n 。

$$C_b^n = \begin{bmatrix} (\mathbf{g}^n)^T \\ (\mathbf{g}^n \times \boldsymbol{\omega}_{ie}^n)^T \\ (\mathbf{g}^n \times \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times \mathbf{g}^n)^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (-\tilde{\mathbf{f}}_{sf}^b)^T \\ (-\tilde{\mathbf{f}}_{sf}^b \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b)^T \\ (\tilde{\mathbf{f}}_{sf}^b \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_{sf}^b)^T \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

由于加速度计和陀螺测量存在噪声,通常采用一段时间内测量值取平均和姿态矩阵最优正交化等方法提高初始对准精度。可以证明上述对准方法达到了 SINS 静基座初始对准的极限精度^[6]。

3.2.2 里程计辅助动基座初始对准算法

在动基座初始对准中,捷联姿态矩阵 C_b^n 是一个时变的矩阵,后文中时变量都以 $\bullet(t)$ 方式明确表示,将 t 时刻的 $C_b^n(t)$ 拆写成如下两个矩阵相乘形式

$$C_b^n(t) = C_{i_0}^n(t) C_b^{i_0}(t) \quad (3-5)$$

式中

$$C_{i_0}^n(t) = C_{n_0}^n(t) C_{e_0}^{n_0} C_{i_0}^{e_0}(t) = C_e^n(t) (C_e^{n_0})^T C_{e_0}^{n_0} C_{i_0}^{e_0}(t) \quad (3-6)$$

其中 $C_e^n(t)$ 、 $C_e^{n_0}$ 和 $C_{e_0}^{n_0}$ 可由运载载体所在点的经度和纬度求得, $C_{i_0}^{e_0}(t)$ 可由初始对准经历的时间 t 实时确定,即

$$C_e^n(t) = \begin{bmatrix} -\sin \lambda_t & \cos \lambda_t & 0 \\ -\sin L_t \cos \lambda_t & -\sin L_t \sin \lambda_t & \cos L_t \\ \cos L_t \cos \lambda_t & \cos L_t \sin \lambda_t & \sin L_t \end{bmatrix},$$

$$C_e^{n_0} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda_0 & \cos \lambda_0 & 0 \\ -\sin L_0 \cos \lambda_0 & -\sin L_0 \sin \lambda_0 & \cos L_0 \\ \cos L_0 \cos \lambda_0 & \cos L_0 \sin \lambda_0 & \sin L_0 \end{bmatrix},$$

$$C_{i_0}^{n_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sin L_0 & 0 & \cos L_0 \\ \cos L_0 & 0 & \sin L_0 \end{bmatrix}, \quad C_{i_0}^{e_0}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\omega_{ie} t) & \sin(\omega_{ie} t) & 0 \\ -\sin(\omega_{ie} t) & \cos(\omega_{ie} t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

其中 λ_0 和 L_0 分别为对准起始 t_0 时刻捷联惯导的经度和纬度, λ_t 和 L_t 分别为初始对准 t 时刻的实时经度和纬度,将 (3-7) 式代入 (3-6) 式,经过合并整理,最终得

$$C_{i_0}^n(t) = \begin{bmatrix} -\sin(\Delta\lambda_t + \omega_{ie} t) & \cos(\Delta\lambda_t + \omega_{ie} t) & 0 \\ -\sin L_t \cos(\Delta\lambda_t + \omega_{ie} t) & -\sin L_t \sin(\Delta\lambda_t + \omega_{ie} t) & \cos L_t \\ \cos L_t \cos(\Delta\lambda_t + \omega_{ie} t) & \cos L_t \sin(\Delta\lambda_t + \omega_{ie} t) & \sin L_t \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

其中,记 t 时刻经度相对变化量 $\Delta\lambda_t = \lambda_t - \lambda_0$ 。求得矩阵 $C_{i_0}^n(t)$ 之后,姿态矩阵 $C_b^n(t)$

的实现就转化为求解 $\mathbf{C}_b^{i_0}(t)$ 了, $\mathbf{C}_b^{i_0}(t)$ 表示捷联惯导相对于初始时刻惯性空间的变换矩阵。至此, 将相对于导航坐标系的初始对准姿态矩阵 $\mathbf{C}_b^n(t)$ 求解问题转化为了以惯性空间为参考基准的变换矩阵 $\mathbf{C}_b^{i_0}(t)$ 求解问题。进一步的, 可将 $\mathbf{C}_b^{i_0}(t)$ 拆写成两部分, 即

$$\mathbf{C}_b^{i_0}(t) = \mathbf{C}_{i_{b0}}^{i_0} \mathbf{C}_b^{i_{b0}}(t) \quad (3-9)$$

在 (3-9) 式中, 利用陀螺输出的角运动信息, 通过捷联惯导姿态更新算法 (3-10) 式可以很容易实时求得矩阵 $\mathbf{C}_b^{i_{b0}}(t)$, 即

$$\dot{\mathbf{C}}_b^{i_{b0}}(t) = \mathbf{C}_b^{i_{b0}}(t) [\boldsymbol{\omega}_{i_{b0}}^b(t) \times] \quad (3-10)$$

其中 $[\boldsymbol{\omega}_{i_{b0}}^b(t) \times]$ 表示由陀螺测量输出 $\boldsymbol{\omega}_{i_{b0}}^b(t) = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t)$ 构成的反对称矩阵, 并且易知对准初始时刻的矩阵初值为单位矩阵, 即 $\mathbf{C}_b^{i_{b0}}(t_0) = \mathbf{I}_{3 \times 3}$ 。

因此, 求解 (3-9) 式的关键在于求解 $\mathbf{C}_{i_{b0}}^{i_0}$, 它表示两个惯性坐标系之间的变换矩阵, 易知它是一个常值阵, 可根据捷联惯导比力方程 (3-11) 式通过适当的变形后求得。

$$\dot{\mathbf{v}}^n(t) = \mathbf{f}_{sf}^n(t) - [\boldsymbol{\omega}_{in}^n(t) + \boldsymbol{\omega}_{ie}^n(t)] \times \mathbf{v}^n(t) + \mathbf{g}^n \quad (3-11)$$

其中

$$\boldsymbol{\omega}_{in}^n(t) = \boldsymbol{\omega}_{ie}^n(t) + \boldsymbol{\omega}_{en}^n(t)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n(t) = [0 \quad \omega_{ie} \cos L_t \quad \omega_{ie} \sin L_t]^T$$

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n(t) = [-v_N^n(t)/R_e \quad v_E^n(t)/R_e \quad v_E^n(t) \tan L_t / R_e]^T = [-\dot{L}_t \quad \dot{\lambda}_t \cos L_t \quad \dot{\lambda}_t \sin L_t]^T$$

这里不妨将地球近似为球体, 其平均半径为 R_e , 并将重力加速度矢量看作常值。

以下详细叙述变换矩阵 $\mathbf{C}_{i_{b0}}^{i_0}$ 的求解过程。

首先, 将惯导比力方程 (3-11) 式改写成

$$\dot{\mathbf{v}}^n(t) + [\boldsymbol{\omega}_{in}^n(t) + \boldsymbol{\omega}_{ie}^n(t)] \times \mathbf{v}^n(t) - \mathbf{f}_{sf}^n(t) = \mathbf{g}^n \quad (3-12)$$

若由等式 $\mathbf{v}^n(t) = \mathbf{C}_b^n(t) \mathbf{v}^b(t)$ 两边同时求导, 并考虑到 $\dot{\mathbf{C}}_b^n(t) = \mathbf{C}_b^n(t) [\boldsymbol{\omega}_{nb}^b(t) \times]$, 则可得 $\dot{\mathbf{v}}^n(t) = \mathbf{C}_b^n(t) [\dot{\mathbf{v}}^b(t) + \boldsymbol{\omega}_{nb}^b(t) \times \mathbf{v}^b(t)]$ 。因此, 可将 (3-12) 式写成

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}_b^n(t) [\dot{\mathbf{v}}^b(t) + \boldsymbol{\omega}_{nb}^b(t) \times \mathbf{v}^b(t)] + \\ & \mathbf{C}_b^n(t) \{ [\boldsymbol{\omega}_{in}^b(t) + \boldsymbol{\omega}_{ie}^b(t)] \times \mathbf{v}^b(t) \} - \mathbf{C}_b^n(t) \mathbf{f}_{sf}^b(t) = \mathbf{g}^n \end{aligned} \quad (3-13)$$

上式合并化简为

$$\mathbf{C}_b^n(t) \{ \dot{\mathbf{v}}^b(t) + [\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t) + \boldsymbol{\omega}_{ie}^b(t)] \times \mathbf{v}^b(t) - \mathbf{f}_{sf}^b(t) \} = \mathbf{g}^n \quad (3-14)$$

或者为

$$\dot{\mathbf{v}}^b(t) + [\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t) + \boldsymbol{\omega}_{ie}^b(t)] \times \mathbf{v}^b(t) - \mathbf{f}_{sf}^b(t) = \mathbf{g}^b \quad (3-15)$$

显而易见 (3-12) 式和 (3-15) 式在表达形式上是完全相同的, 两式中只相差上下标符号 b 和 n 。将 (3-14) 式两边同时左乘以 $\mathbf{C}_{n}^{i_{b0}}(t) = \mathbf{C}_{b}^{i_{b0}}(t)\mathbf{C}_{n}^b(t)$, 即在 i_{b0} 系上投影得

$$\mathbf{C}_{b}^{i_{b0}}(t) \{ \dot{\mathbf{v}}^b(t) + [\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t) + \boldsymbol{\omega}_{ie}^b(t)] \times \mathbf{v}^b(t) - \mathbf{f}_{sf}^b(t) \} = \mathbf{C}_{i_0}^{i_{b0}} \mathbf{C}_n^{i_0}(t) \mathbf{g}^n \quad (3-16)$$

其中 $\mathbf{v}^b(t)$ 是捷联惯组对地速度在 b 系上的投影, 可借助于外界测速仪测量再经过适当安装偏差角和杆臂补偿后获得。

在实际应用 (3-16) 式时需进行两点近似, 其一是, 初始对准完成之前 $\boldsymbol{\omega}_{ie}^b(t) = \mathbf{C}_n^b(t)\boldsymbol{\omega}_{ie}^n(t)$ 中的实时姿态矩阵 $\mathbf{C}_n^b(t)$ 是未知的, 因而只得将 $\boldsymbol{\omega}_{ie}^b(t) \times \mathbf{v}^b(t)$ 忽略了; 其二是, 在矩阵 $\mathbf{C}_n^{i_0}(t)$ 中, 初始对准若捷联惯组发生移动且无法获取实时的位置信息, 则只能近似以初始经纬度代替之, 即以 $\mathbf{C}_{\tilde{n}}^{i_0}(t)$ 代替 $\mathbf{C}_n^{i_0}(t)$, 参考 (3-8) 式构造 $\mathbf{C}_{\tilde{n}}^{i_0}(t)$ 的表达式如下

$$\mathbf{C}_{\tilde{n}}^{i_0}(t) = \begin{bmatrix} -\sin(\omega_{ie}t) & \cos(\omega_{ie}t) & 0 \\ -\sin L_0 \cos(\omega_{ie}t) & -\sin L_0 \sin(\omega_{ie}t) & \cos L_0 \\ \cos L_0 \cos(\omega_{ie}t) & \cos L_0 \sin(\omega_{ie}t) & \sin L_0 \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

经计算得误差矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\tilde{n}}^n(t) &= \mathbf{C}_{i_0}^n(t)\mathbf{C}_{\tilde{n}}^{i_0}(t) = \mathbf{C}_e^n(t)\mathbf{C}_{\tilde{n}}^e(t) \\ &\approx \mathbf{I} - \int_{t_0}^t [\boldsymbol{\omega}_{en}^n(s) \times] ds \approx \begin{bmatrix} 1 & \Delta\lambda_t \sin L_0 & -\Delta\lambda_t \cos L_0 \\ -\Delta\lambda_t \sin L_0 & 1 & -\Delta L_t \\ \Delta\lambda_t \cos L_0 & \Delta L_t & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-18)$$

其中 $\Delta L_t = L_t - L_0$ 。

通过上述两点近似简化后, (3-16) 式转化为

$$\mathbf{C}_{b}^{i_{b0}}(t) [\dot{\mathbf{v}}^b(t) + \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t) \times \mathbf{v}^b(t) - \mathbf{f}_{sf}^b(t)] \approx \mathbf{C}_{i_0}^{i_{b0}} \mathbf{C}_{\tilde{n}}^{i_0} \mathbf{g}^n \quad (3-19)$$

例如, 当运载体速度为 10m/s 时, $\boldsymbol{\omega}_{ie}^b(t) \times \mathbf{v}^b(t)$ 的元素量级最大约为 $7.3 \times 10^{-5}g$, 大致与惯性级加速度计测量误差同量级, 而行驶 300s 时位置变化最多 3000m, 相当于 (3-18) 式中经度或纬度最大误差 1.6', 或者相当于在 (3-19) 式中产生了等效的重力偏斜误差, 这与 300s 的地球自转角度变化 75' 相比, 可近似为小量。上述列举的数值也说明了本节对准方法一般只适用于低速运动的环境, 这与第二章 2.2.4 节关于捷联罗经适用范围的结论是一致的。很明显, 正如 2.4.2

节罗经方位对准中指出的位置变化补偿做法一样，在此处的对准过程中逐渐求得了姿态矩阵后，亦可实时进行部分的运载体位置变化的补偿，它将会比上述（3-19）式简单的两点近似处理效果更加合理和准确些。

为了降低里程计测量和加速度计测量噪声干扰的影响，将（3-19）式两边同时积分，并考虑到零初始值，得

$$\mathbf{v}^{i_{b0}}(t) = \mathbf{C}_{i_0}^{i_{b0}} \mathbf{u}^{i_0}(t) \quad (3-20)$$

其中记

$$\mathbf{v}^{i_{b0}}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{C}_{i_0}^{i_{b0}}(s) [\dot{\mathbf{v}}^b(s) + \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(s) \times \mathbf{v}^b(s) - \mathbf{f}_{sf}^b(s)] ds \quad (3-21a)$$

$$\mathbf{u}^{i_0}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{C}_{i_0}^{i_0}(s) \mathbf{g}^n ds \quad (3-21b)$$

求这两个积分式的关键在于构造（3-21a）式中的 $\dot{\mathbf{v}}^b(s)$ ，它表示运载体的对地加速度，一般不能直接通过里程计测量到，如果直接由里程计的速度输出差分必然带来很大的噪声。从第二章捷联罗经水平对准方法中知，水平对准之后可以获得比较准确和平滑的运载体在 b 系投影的速度，因而可以使用罗经速度差分法构造 $\dot{\mathbf{v}}^b(s)$ 。因此，在使用本节新方法对准之前，往往还需先进行一段时间的罗经水平对准，待罗经水平对准稳定后，才开始进行新方法初始对准，并且在新方法对准整个过程中，同时使用罗经水平对准为新对准方法提供准确而平滑的 b 系速度信息。

在（3-20）式中，分别取 $t = t_l$ 和 $t = t_m$ 两个对准过程中的不同时刻，如中间时刻和末了时刻，则有 $\mathbf{v}^{i_{b0}}(t_l) = \mathbf{C}_{i_0}^{i_{b0}} \mathbf{u}^{i_0}(t_l)$ 和 $\mathbf{v}^{i_{b0}}(t_m) = \mathbf{C}_{i_0}^{i_{b0}} \mathbf{u}^{i_0}(t_m)$ ，再利用同（3-4）式一样的矩阵构造算法可立即求得常值矩阵 $\mathbf{C}_{i_0}^{i_{b0}}$ ，即

$$\mathbf{C}_{i_0}^{i_{b0}} = \begin{bmatrix} [\mathbf{u}^{i_0}(t_l)]^T \\ [\mathbf{u}^{i_0}(t_l) \times \mathbf{u}^{i_0}(t_m)]^T \\ [\mathbf{u}^{i_0}(t_l) \times \mathbf{u}^{i_0}(t_m) \times \mathbf{u}^{i_0}(t_l)]^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [\mathbf{v}^{i_{b0}}(t_l)]^T \\ [\mathbf{v}^{i_{b0}}(t_l) \times \mathbf{v}^{i_{b0}}(t_m)]^T \\ [\mathbf{v}^{i_{b0}}(t_l) \times \mathbf{v}^{i_{b0}}(t_m) \times \mathbf{v}^{i_{b0}}(t_l)]^T \end{bmatrix} \quad (3-22)$$

综上所述，动基座初始对准算法中将初始对准姿态矩阵 $\mathbf{C}_b^n(t)$ 的实现分解成 $\mathbf{C}_{i_0}^n(t)$ 、 $\mathbf{C}_b^{i_{b0}}(t)$ 和 $\mathbf{C}_{i_0}^{i_{b0}}$ 三部分，它们均以惯性坐标系作为参考基准，因此能有效解决动基座角运动和线运动的干扰影响。

当然，如果有条件作逆向导航解算的话，就可以在上述动基座对准（一次对准）的基础上，再进行一次逆向航位推算，获得对准初始时刻的较为准确的姿态矩阵，接着便可作正向导航计算运载体的位置，也就能够较准确地利用（3-16）式，而非近似的（3-19）式求解矩阵 $\mathbf{C}_{i_0}^{i_{b0}}$ ，进行二次对准。原则上，二次对准后将获得比一次对准更精确的姿态矩阵，二次对准还能得到对准完成时刻的运载体位置。

3.2.3 车载里程计辅助初始对准试验

2007 年 7 月 16 日—18 日在西安航天时代电子仪器公司第十六研究所附近进行了车载动基座初始对准试验，试验设备主要包括：激光捷联惯组、里程计、GPS 接收机、载车、导航计算机及相关电源等，其中激光陀螺漂移约为 $0.007^{\circ}/h$ ，加速度计零偏约为 $5 \times 10^{-5}g$ ，里程计输出脉冲当量为 $0.08194m/脉冲$ ，GPS 定位精度约为 10 m 。里程计测量经过罗经水平对准法平滑处理后为动基座初始对准提供参考速度输入，利用 GPS 位置信息装订对准的初始位置。若要在载车运动过程中实时考察动基座初始对准的精度存在比较大的困难，因此，本试验设计了如下的动基座初始对准试验方案：

- ①捷联惯组预热准备好后，启动载车进入行驶状态；
- ②在载车运动条件下运行动基座初始对准程序，对准过程中载车不停，平均行驶速度约为 $5m/s$ ，初始对准至大约 $10min$ 时结束对准；
- ③动基座初始对准结束后，立即以对准结果建立初始姿态矩阵进行纯惯性导航，进入姿态跟踪，再在短时间内停止载车，保持载车不动，记录下捷联惯组的俯仰角 θ_1 、横滚角 γ_1 和方位角 ψ_1 ，把它们当作动基座初始对准的结果；
- ④保持载车不动，在载车静止条件下进行一次 $5min$ 传统静基座初始对准，记录静基座初始对准结果 θ_2 、 γ_2 和 ψ_2 ，以其作为动基座对准的比较参考基准。

总共进行了六组试验，结果如表 3-1 所示。在其它试验中已经测得该套惯组的静基座初始对准方位精度优于 $2'$ ，因此可以认为表 3-1 中方位角误差 $\psi_1-\psi_2$ 项主要是由动基座初始对准引起的，经计算 $\psi_1-\psi_2$ 的均方差约为 0.1° (1σ)。

表 3-1 初始对准试验结果

组别	动基座对准 / ($^{\circ}$)			静基座对准 / ($^{\circ}$)			误差 / ($^{\circ}$)		
	θ_1	γ_1	ψ_1	θ_2	γ_2	ψ_2	$\theta_1-\theta_2$	$\gamma_1-\gamma_2$	$\psi_1-\psi_2$
1	-0.791	0.989	50.924	-0.765	0.988	50.839	-0.026	0.001	0.085
2	-0.651	1.296	263.884	-0.625	1.282	263.727	-0.026	0.014	0.157
3	-0.908	0.589	51.985	-0.926	0.551	52.038	0.018	0.038	-0.053
4	-0.010	0.808	263.359	0.019	0.805	263.181	-0.029	0.003	0.178
5	-0.753	0.589	50.934	-0.730	0.597	51.016	-0.023	-0.080	-0.082
6	0.641	0.803	265.131	0.634	0.780	265.052	0.007	0.023	0.079

3.3 GPS 辅助动基座初始对准

首先简要介绍一下在初始处准中 GPS 信息可能发挥的定姿作用。毫无疑问，

不论是静止还是运动情况下,基于多天线的高精度 GPS 可以实时确定运载体的姿态,但是这种高精度 GPS 定姿的价格通常比较昂贵,并且一般不适用于小型运载体,不列入本节的讨论范围。在运动条件下单天线 GPS 也可以确定运载体姿态,它的基本原理是:假设运载体的运动是协调的(即攻角和侧滑角均为零或很小),GPS 输出导航系下的三维速度矢量 $\mathbf{v}^n = [\mathbf{v}_E^n \quad \mathbf{v}_N^n \quad \mathbf{v}_U^n]^T$, 速度矢量与其水平投影间的夹角为运载体俯仰角 θ , 水平投影与北向之间的夹角为方位角 ψ , 即有: $\tan \theta = \mathbf{v}_U^n / \sqrt{(\mathbf{v}_E^n)^2 + (\mathbf{v}_N^n)^2}$ 和 $\tan \psi = -\mathbf{v}_E^n / \mathbf{v}_N^n$, 但是该方法难以精确求得横滚角 γ , 不过对于载车之类的运载体来说,可以近似认为横滚角在零附近变化。利用上述单天线原理确定粗略姿态矩阵后,接着便可进入经典的精对准滤波估计失准角阶段了,然而实际使用时,粗略姿态矩阵的精度取决于 GPS 的速度测量精度、运载体的运动速度、以及运载体运动的协调性,特别在运载体低速运动时,姿态矩阵精度受到了极大的限制,甚至在静止时失效。文献[26]研究了利用单天线 GPS 进行飞行器姿态测量的方法,它根据飞行力学原理及使用加速度计辅助,即使在非协调运动情况下也可以求得载体的三个姿态角,但是,在载车和舰船等相对低速运动的运载体并且运动不受飞行力学原理类似规律支配的情况下,依然不容易求得这三个粗略的姿态角。

3.3.1 GPS 辅助动基座初始对准算法

与里程计辅助动基座初始对准方法稍有不同,现把惯导比力方程(3-11)式改写成

$$-\mathbf{f}_{sf}^n(t) = -\dot{\mathbf{v}}^n(t) - [\boldsymbol{\omega}_{in}^n(t) + \boldsymbol{\omega}_{ie}^n(t)] \times \mathbf{v}^n(t) + \mathbf{g}^n \quad (3-23)$$

将(3-23)式两边同时左乘 $\mathbf{C}_{i_0}^{i_{b0}} \mathbf{C}_n^{i_0}(t)$, 得

$$-\mathbf{C}_{i_0}^{i_{b0}}(t) \mathbf{f}_{sf}^b(t) = \mathbf{C}_{i_0}^{i_{b0}} \mathbf{C}_n^{i_0}(t) \{-\dot{\mathbf{v}}^n(t) - [\boldsymbol{\omega}_{in}^n(t) + \boldsymbol{\omega}_{ie}^n(t)] \times \mathbf{v}^n(t) + \mathbf{g}^n\} \quad (3-24)$$

再将上式两边从 t_0 时刻到 t 时刻积分得

$$\mathbf{v}^{i_{b0}}(t) = \mathbf{C}_{i_0}^{i_{b0}} \mathbf{u}^{i_0}(t) \quad (3-25)$$

其中

$$\mathbf{v}^{i_{b0}}(t) = -\int_{t_0}^t \mathbf{C}_{i_0}^{i_{b0}}(s) \mathbf{f}_{sf}^b(s) ds \quad (3-26a)$$

$$\mathbf{u}^{i_0}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{C}_n^{i_0}(s) \{-\dot{\mathbf{v}}^n(s) - [\boldsymbol{\omega}_{in}^n(s) + \boldsymbol{\omega}_{ie}^n(s)] \times \mathbf{v}^n(s) + \mathbf{g}^n\} ds \quad (3-26b)$$

不妨称 $\mathbf{v}^{i_{b0}}(t)$ 和 $\mathbf{u}^{i_0}(t)$ 为惯性视速度。最后,在(3-25)式中,分别取 $t = t_l$ 和 $t = t_m$ 两个不同初始对准过程中的时刻,则有 $\mathbf{v}^{i_{b0}}(t_l) = \mathbf{C}_{i_0}^{i_{b0}} \mathbf{u}^{i_0}(t_l)$ 和 $\mathbf{v}^{i_{b0}}(t_m) = \mathbf{C}_{i_0}^{i_{b0}} \mathbf{u}^{i_0}(t_m)$,

再利用同 (3-22) 式一样的算法, 可立即求得常值矩阵 $C_{i_{b0}}^{i_0}$ 。

以下将 (3-21) 式与 (3-26) 式作个比较。里程计辅助初始对准的特点是除重力矢量 (重力矢量在 n 系投影是已知的) 外将比力方程其它项都投影至 b 系, 因为里程计是相对于 b 系测量的, 由于对准实现之前姿态矩阵未知, 只得在 (3-21a) 式中将姿态矩阵有关的计算量 $\omega_{ie}^b(t) \times v^b(t)$ 忽略, 又由于对准过程中运载体运动引起的位置变化未知, 只得在 (3-16b) 式中将位置变化有关的计算量 $C_n^{\tilde{n}}(t)$ 忽略。而 GPS 辅助动基座初始对准的特点是, GPS 可提供 n 系下的速度和地理位置量, 在 (3-26b) 式中 $C_n^{i_0}(s), \omega_{in}^n(s), \omega_{ie}^n(s), v^n(s), g^n$ 都是已知量, 但是由于一般 GPS 接收机不具备加速度测量功能, 因而其中的难点是构造对地加速度 $\dot{v}^n(s)$ 。

3.3.2 惯性视速度的数值积分方法及误差分析

① 惯性视速度 $v^{i_{b0}}(t)$ 和 $u^{i_0}(t)$ 数值积分方法

在 (3-16a) 式中 $C_b^{i_{b0}}(t)$ 来自陀螺输出信息, $f_{sf}^b(t)$ 为加速度计比力输出, $v^{i_{b0}}(t)$ 的数值积分方法与一般捷联惯导速度更新算法类似, 具体可参考文献 [40], 这里不再赘述。

通常由 GPS 可输出运载体经度、纬度、高度以及在导航坐标系 n 系下的速度矢量信息, 但不能直接获得运载体的加速度信息, 所以本节暂且通过 GPS 速度差分来表示运载体加速度。假设 GPS 的速度和位置的测量输出是等间隔的, 其周期为 T_s 。将 (3-26b) 式分解为三部分

$$u^{i_0}(t) = -u_1^{i_0}(t) - u_2^{i_0}(t) + u_3^{i_0}(t) \quad (3-27)$$

其中

$$\begin{aligned} u_1^{i_0}(t) &= \int_{t_0}^t C_n^{i_0}(s) \dot{v}^n(s) ds \\ u_2^{i_0}(t) &= \int_{t_0}^t C_n^{i_0}(s) \{ [\omega_{in}^n(s) + \omega_{ie}^n(s)] \times v^n(s) \} ds \\ u_3^{i_0}(t) &= \int_{t_0}^t C_n^{i_0}(s) g^n ds \end{aligned}$$

首先, 将 GPS 速度差分后代入 $u_1^{i_0}(t)$, 可求得积分递推公式

$$u_1^{i_0}(t_k) = u_1^{i_0}(t_{k-1}) + C_n^{i_0}(t_{k-1}) [v^n(t_k) - v^n(t_{k-1})] \quad (3-28a)$$

其次, 直接将速度代入 $u_2^{i_0}(t)$, 求得递推公式

$$u_2^{i_0}(t_k) = u_2^{i_0}(t_{k-1}) + C_n^{i_0}(t_{k-1}) \{ [\omega_{in}^n(t_{k-1}) + \omega_{ie}^n(t_{k-1})] \times v^n(t_{k-1}) \} T_s \quad (3-28b)$$

以上两式中 $C_n^{i_0}(t_{k-1})$ 、 $\omega_{in}^n(t_{k-1})$ 和 $\omega_{ie}^n(t_{k-1})$ 均可由 t_{k-1} 时刻 GPS 速度和位置信息求

得。最后计算 $\mathbf{u}_3^{i_0}(t_k)$ 的递推公式如下

$$\mathbf{u}_3^{i_0}(t_k) = \mathbf{u}_3^{i_0}(t_{k-1}) + \mathbf{C}_n^{i_0}(t_{k-1}) \mathbf{g}^n T_s \quad (3-28c)$$

② 惯性视速度误差分析

比静基座初始对准条件更加恶劣，除静态误差外，动基座对准环境下陀螺和加速度计的动态误差也会影响到 (3-26a) 式中 $\mathbf{v}^{i_0}(t)$ 的求解精度，因此，实际系统中动基座对准误差一般比静基座对准误差大，实现高精度动基座对准往往要求 SINS 具备很好的动态性能。但是有一点容易想象的是，如果对准过程中运载体不断改变方位绕着闭合环路行驶，则有可能减弱陀螺常值漂移和加速度计常值零偏的不利影响。

从 (3-1) 式和 (3-2) 式知，在动基座下欲实现高精度的初始对准必须确保较高的速度或位置测量精度。本节假设 SINS 的动态导航性能满足要求，而主要研究如何使用 GPS 辅助来实现动基座对准，假设 GPS 的速度和位置测量精度分别为 0.1m/s 和 10m 量级，研究 GPS 精度对初始对准精度的影响。下面主要分析 (3-28) 式的解算误差，想要准确求得它的误差表达式是比较复杂的，特别是对于 $\mathbf{C}_n^{i_0}(t)$ 的计算误差，因此，分析过程中进行了适当的简化。

首先，展开 (3-28a) 式，采用各时刻求和方法表示，得

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^{i_0}(t_k) &= \sum_{r=0}^{k-1} \mathbf{C}_n^{i_0}(t_r) [\mathbf{v}^n(t_{r+1}) - \mathbf{v}^n(t_r)] \\ &= -\mathbf{C}_n^{i_0}(t_0) \mathbf{v}^n(t_0) + \sum_{r=0}^{k-2} [\mathbf{C}_n^{i_0}(t_r) - \mathbf{C}_n^{i_0}(t_{r+1})] \mathbf{v}^n(t_{r+1}) + \mathbf{C}_n^{i_0}(t_{k-1}) \mathbf{v}^n(t_k) \end{aligned} \quad (3-29)$$

而实际初始对准计算时，上式写成

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_1^{i_0}(t_k) &= -\tilde{\mathbf{C}}_n^{i_0}(t_0) \tilde{\mathbf{v}}^n(t_0) \\ &\quad + \sum_{r=0}^{k-2} [\tilde{\mathbf{C}}_n^{i_0}(t_r) - \tilde{\mathbf{C}}_n^{i_0}(t_{r+1})] \tilde{\mathbf{v}}^n(t_{r+1}) + \tilde{\mathbf{C}}_n^{i_0}(t_{k-1}) \tilde{\mathbf{v}}^n(t_k) \end{aligned} \quad (3-30)$$

其中 $\tilde{\mathbf{u}}_1^{i_0}(t_r)$ 、 $\tilde{\mathbf{C}}_n^{i_0}(t_r)$ 、 $\tilde{\mathbf{v}}^n(t_r)$ 分别表示与真实值 $\mathbf{u}_1^{i_0}(t_r)$ 、 $\mathbf{C}_n^{i_0}(t_r)$ 、 $\mathbf{v}^n(t_r)$ 相对应的实际计算或测量值 ($r = 0, 1, 2, \dots, k$)。在 GPS 速度测量误差 0.1m/s 量级，位置测量误差 10m 量级的假设条件下，(3-30) 式计算误差中起主要作用的是速度误差，因此可以不妨假设 $\tilde{\mathbf{C}}_n^{i_0}(t_r) \approx \mathbf{C}_n^{i_0}(t_r)$ ，将 (3-30) 式减 (3-29) 式得误差

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_1^{i_0}(t_k) &= -\mathbf{C}_n^{i_0}(t_0) \delta \mathbf{v}^n(t_0) \\ &\quad + \sum_{r=0}^{k-2} [\mathbf{C}_n^{i_0}(t_r) - \mathbf{C}_n^{i_0}(t_{r+1})] \delta \mathbf{v}^n(t_{r+1}) + \mathbf{C}_n^{i_0}(t_{k-1}) \delta \mathbf{v}^n(t_k) \end{aligned} \quad (3-31)$$

其中 $\delta \mathbf{u}_1^{i_0}(t_k) = \tilde{\mathbf{u}}_1^{i_0}(t_k) - \mathbf{u}_1^{i_0}(t_k)$ 、 $\delta \mathbf{v}^n(t_r) = \tilde{\mathbf{v}}^n(t_r) - \mathbf{v}^n(t_r)$ 。假设运载体运动速度比较小，即满足 $|\mathbf{v}^n(t_r)| / R_e \ll \omega_{ie}$ ，再假设对准时间比较短，即可将 $\omega_{ie} t_r$ 视为小量，则在 (3-8) 式中，近似有 $L_{t_r} \approx L_{t_{r-1}}$ 、 $\Delta \lambda_{t_r} \approx \Delta \lambda_{t_{r-1}}$ 、 $\sin(\Delta \lambda_{t_r} + \omega_{ie} t_r) \approx \Delta \lambda_{t_r} + \omega_{ie} t_r$ 、 $\cos(\Delta \lambda_{t_r} + \omega_{ie} t_r) \approx 1$ ，将它们代入 $\mathbf{C}_n^{i_0}(t_{r-1}) - \mathbf{C}_n^{i_0}(t_r)$ ，经计算可近似得

$$\mathbf{C}_n^{i_0}(t_{r-1}) - \mathbf{C}_n^{i_0}(t_r) = \omega_{ie} T_s \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin L_{t_{r-1}} & -\cos L_{t_{r-1}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-32)$$

由此可见 $\mathbf{C}_n^{i_0}(t_{r-1}) - \mathbf{C}_n^{i_0}(t_r)$ 中绝对值最大的元素为 $\omega_{ie} T_s$ ，以下将该差值矩阵的影响直接等效为系数 $\omega_{ie} T_s$ （事实上它将误差估计放大了）。记速度误差均值 $\delta \mathbf{v}^n(t_k) = [\sum_{r=1}^k \delta \mathbf{v}^n(t_r)]/k$ ，则（3-31）式近似简写为

$$\delta \mathbf{u}_1^{i_0}(t_k) \approx \omega_{ie}(t_{k-1} - t_1) \delta \mathbf{v}^n(t_{k-1}) + \mathbf{C}_n^{i_0}(t_{k-1}) \delta \mathbf{v}^n(t_k) - \mathbf{C}_n^{i_0}(t_0) \delta \mathbf{v}^n(t_0) \quad (3-33)$$

通常认为一段时间内 GPS 速度测量误差的均值为零，至少是一个小量，即使假设 $\delta \mathbf{v}^n(t_{k-1}) = 0.1\text{m/s}$ 和 $t_{k-1} - t_1 = 300\text{s}$ ，则 $\omega_{ie}(t_{k-1} - t_1) \delta \mathbf{v}^n(t_{k-1})$ 引起的误差量级约为 $\omega_{ie} \times 300\text{s} \times 0.1\text{m/s} \approx 0.002\text{m/s}$ ，因此，相比而言（3-33）式的后两项，即起始时刻速度误差 $\delta \mathbf{v}^n(t_0)$ 和末了时刻速度误差 $\delta \mathbf{v}^n(t_k)$ ，是造成 $\delta \mathbf{u}_1^{i_0}(t_k)$ 解算误差的主要原因。

其次，当运载体速度比较小时，由 $|\mathbf{v}^n(t_r)|/R_e \ll \omega_{ie}$ 可知有 $|\boldsymbol{\omega}_{en}^n(t_r)| \ll |\boldsymbol{\omega}_{ie}^n(t_r)|$ 成立，又由于 $\mathbf{C}_n^{i_0}(t_r)[\boldsymbol{\omega}_{ie}^n(t_r) \times] = [\boldsymbol{\omega}_{ie}^{i_0}(t_r) \times] \mathbf{C}_n^{i_0}(t_r)$ ，所以在（3-28b）式中忽略 $\boldsymbol{\omega}_{en}^n(t_r)$ 的影响后将其简化为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2^{i_0}(t_k) &\approx \mathbf{u}_2^{i_0}(t_{k-1}) + 2[\boldsymbol{\omega}_{ie}^{i_0}(t_{k-1}) \times] \mathbf{C}_n^{i_0}(t_{k-1}) \mathbf{v}^n(t_{k-1}) T_s \\ &= 2 \sum_{r=0}^{k-1} [\boldsymbol{\omega}_{ie}^{i_0}(t_r) \times] \mathbf{C}_n^{i_0}(t_r) \mathbf{v}^n(t_r) T_s \end{aligned} \quad (3-34)$$

而实际计算时，上式写成

$$\tilde{\mathbf{u}}_2^{i_0}(t_k) = 2 \sum_{r=0}^{k-1} [\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^{i_0}(t_r) \times] \tilde{\mathbf{C}}_n^{i_0}(t_r) \tilde{\mathbf{v}}^n(t_r) T_s \quad (3-35)$$

其中 $\tilde{\mathbf{u}}_2^{i_0}(t_r)$ 、 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^{i_0}(t_r)$ 分别是与真实值 $\mathbf{u}_2^{i_0}(t_r)$ 、 $\boldsymbol{\omega}_{ie}^{i_0}(t_r)$ 相对应的计算值，同理认为对 $\mathbf{u}_k^{i_0}(t_r)$ 计算误差造成主要影响的是 GPS 速度测量误差，并近似 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^{i_0}(t_r) \approx \boldsymbol{\omega}_{ie}^{i_0}(t_r)$ 和 $\tilde{\mathbf{C}}_n^{i_0}(t_r) \approx \mathbf{C}_n^{i_0}(t_r)$ ，将（3-35）式减（3-34）式，容易看出矩阵 $[\boldsymbol{\omega}_{ie}^{i_0}(t_r) \times] \mathbf{C}_n^{i_0}(t_r)$ 中绝对值最大的元素不大于 ω_{ie} ，也不妨将该矩阵的影响等效为系数 ω_{ie} ，因而得 $\mathbf{u}_2^{i_0}(t_r)$ 计算误差的估计

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_2^{i_0}(t_k) &\approx 2 \sum_{r=0}^{k-1} [\boldsymbol{\omega}_{ie}^{i_0}(t_r) \times] \mathbf{C}_n^{i_0}(t_r) \delta \mathbf{v}^n(t_r) T_s \\ &\approx 2 \omega_{ie} T_s \sum_{r=0}^{k-1} \delta \mathbf{v}^n(t_r) = 2 \omega_{ie} (t_{k-1} - t_0) [\sum_{r=0}^{k-1} \delta \mathbf{v}^n(t_r)]/k \end{aligned} \quad (3-36)$$

其中 $\delta \mathbf{u}_2^{i_0}(t_k) = \tilde{\mathbf{u}}_2^{i_0}(t_k) - \mathbf{u}_2^{i_0}(t_k)$ ，显然（3-36）式对速度解算误差的影响与（3-33）式中的第一项是类似同量级的。

最后，容易看出，若不考虑重力异常误差，在一般 10m 量级的 GPS 位置误差条件下 $\mathbf{u}_3^{i_0}(t_k)$ 的解算误差是很小的，完全可以忽略不计。

综上误差分析结果，造成 $\mathbf{u}^{i_0}(t)$ 积分解算误差的主要原因是 $\mathbf{u}_1^{i_0}(t)$ 中的初始对

准起始和末了时刻的 GPS 速度测量误差。虽然里程计辅助动基座对准中也存在类似的问题（即（3-21a）式积分算法的起始和末了时刻，如果直接使用里程计输出速度差分，计算噪声对积分值影响较大），但幸运的是，借助于里程计辅助利用捷联罗经水平对准可以获得准确平滑的 b 系速度。然而遗憾的是，在方位未知情况下，GPS 速度与捷联惯组一起难以建立类似的速度平滑算法，因为方位未知情况下 GPS 测量是在 n 系下表示的，而惯性器件输出属于 b 系，它们在不同参照系之间无法实现比较和组合。因此，在一般情况下，如果不能提高 GPS 速度测量精度的话，则只能通过延长初始对准时间来改善对准精度。但是，在载车环境下，如果有条件给予短暂停车辅助的话，即在获取 $u_1^b(t)$ 初始或末了时刻载车速度时处于停车状态，将已知的准确停车零速度代替 GPS 测量速度，就能完全消除这两个时刻 GPS 测量噪声误差的影响，从而提高对准精度。结合（3-22）式的计算特点，进行一次初始对准总共需三次停车，即在 t_0 、 t_l 和 t_m 时刻，而其它时刻载车可以处于自由运动状态，并且对 GPS 辅助速度测量精度不必做过高要求。此外，与 SINS 惯性器件采样速率相比，GPS 的导航信息输出速率一般比较低（如 SINS 为 100Hz，而 GPS 通常为 1Hz 或 10Hz），虽然在整个对准过程中矩阵 $C_n^i(t)$ 是缓慢变化的，但是较小的运载体机动对提高 $u_1^b(t)$ 数值积分精度和初始对准精度应当是有利的。

3.3.3 车载 GPS 辅助动基座对准试验

2008 年 3 月 18 日在西安航天时代电子仪器公司第十六研究所附近进行了初始对准试验，试验设备主要包括：激光捷联惯导、GPS 接收机、载车、导航计算机及相关电源等，其中激光陀螺漂移约为 $0.005^\circ/\text{h}$ ，加速度计零偏约为 $3 \times 10^{-5}g$ ，GPS 输出频率 1Hz，定位精度约为 2m，由于 GPS 没有速度输出功能，试验中采用位置差分法获得速度信息。设计了如下的动基座初始对准和对准精度评估方案：

①捷联惯组预热准备；

②GPS 辅助动基座对准过程中载车运行状态大致为：停车 10s（启动对准程序）→行驶 2.5min→停车 10s→行驶 2.5min→停车 10s（结束对准程序），其中载车最大行驶速度约 50km/h，行驶路程 2~4km，初始对准时间 5~6min；

③每一次动基座初始对准结束后，记录下 SINS 的俯仰角 θ_1 、横滚角 γ_1 和方位角 ψ_1 ；

④保持载车不动，在载车静止条件下再进行一次 5min 传统静基座初始对准，并记录静基座初始对准结果俯仰角 θ_2 、横滚角 γ_2 和方位角 ψ_2 ，将其作为动基座初始对准的比较参考。

总共进行了六组初始对准试验, 对准结果参见表 3-2, 认为其中方位角误差 $\psi_1 - \psi_2$ 项主要是由动基座初始对准引起的, 经计算 $\psi_1 - \psi_2$ 的均方差约为 0.081° (1σ)。

表 3-2 GPS 辅助动基座初始对准试验结果

组别	动基座对准 / °			静基座对准 / °			误差 / °		
	θ_1	γ_1	ψ_1	θ_2	γ_2	ψ_2	$\theta_1 - \theta_2$	$\gamma_1 - \gamma_2$	$\psi_1 - \psi_2$
1	2.799	0.507	178.313	2.799	0.495	178.181	0	0.012	0.132
2	-0.402	-0.193	89.558	-0.405	-0.195	89.647	0.003	0.002	-0.089
3	0.586	1.541	-90.585	0.592	1.534	-90.565	-0.006	0.007	-0.020
4	-0.978	0.612	179.222	-0.971	0.599	179.199	-0.007	0.013	0.023
5	-0.044	0.353	-0.030	-0.043	0.342	0.025	-0.001	0.011	-0.055
6	-0.911	-1.340	0.796	-0.914	-1.338	0.859	0.003	-0.002	-0.063

3.4 晃动干扰基座初始对准

多数研究者在研究晃动干扰甚至摇摆基座下的精确初始对准时 (精对准), 都以事先能够获得 SINS 初始粗略姿态矩阵为前提, 而未对该粗略姿态矩阵的自主获取途径 (粗对准) 作进一步的分析。当然, 在具备初始粗略姿态矩阵的前提下, 建立小角度失准角误差模型, 利用导航速度误差, 通过滤波方法估计并校正失准角, 可获得准确的姿态矩阵, 由于在精对准过程中进行了实时的姿态更新解算, 因而精对准具备抵抗晃动干扰的能力。然而传统解析式粗对准方法只对陀螺和加速度测量值作简单的加权平均处理, 若在晃动基座下计算粗略姿态矩阵, 结果误差可能会很大, 甚至不能使用。因为晃动条件下运载体晃动角速率远远大于地球自转角速率, 也就是地球自转角速率湮没在运载体晃动角速率中, 特别地若运载体不存在明显的角晃动平衡中心时, 采取一段时间的陀螺角速率测量值取平均法, 其平均值反映的主要是运载体角晃动信息, 几乎不包含地球自转角速率信息, 从中也就无法估计出捷联惯组相对于地球自转轴北向的粗略方位。因此, 在晃动基座下传统解析式对准方法一般无法实现方位粗略对准。

3.4.1 晃动干扰基座初始对准算法

本章 3.2 节介绍了里程计辅助动基座初始对准方法, 3.3 节介绍了 GPS 辅助动基座初始对准方法, 而本节的晃动干扰基座初始对准可以看成是前两者中任何一个的特例。参见 (3-16) 式, 将其中的 b 系对地速度 $\mathbf{v}^b(t)$ 及加速度置为零, 或参见 (3-24) 式, 将其中的 n 系对地速度 $\mathbf{v}^n(t)$ 及加速度置为零, 均可直接获得晃

动干扰基座初始对准算法如下

$$-C_b^{i_{b0}}(t)f_{sf}^b(t) = C_{i_0}^{i_{b0}}C_n^{i_0}(t)g^n \quad (3-37a)$$

$$v^{i_{b0}}(t) = C_{i_0}^{i_{b0}}u^{i_0}(t) \quad (3-37b)$$

其中

$$v^{i_{b0}}(t) = -\int_{t_0}^t C_b^{i_{b0}}(s)f_{sf}^b(s)ds \quad (3-38a)$$

$$u^{i_0}(t) = \int_{t_0}^t C_n^{i_0}(s)g^n ds \quad (3-38b)$$

同理，通过选取两个不同的积分时刻，再利用（3-22）求得常值矩阵 $C_{i_0}^{i_{b0}}$ ，便可实现初始对准。

在惯性级捷联惯组设计中，一般加速度计的相对误差（加速度计零偏误差和重力加速度大小之比值）远小于陀螺的相对误差（陀螺漂移误差和地球自转角速率之比值），因而，常规粗对准中有小的晃动干扰时，捷联惯组静止一段时间，惯性器件测量取平均值进行初始姿态矩阵计算，其目的主要是为了降低陀螺测量误差的影响。在本章新的初始对准方法中，利用陀螺输出进行矩阵 $C_b^{i_{b0}}(t)$ 的更新隔离了运载体角运动的影响，但是其对准精度会受线加速度的影响。当运载体作角晃动时，由于杆臂效应，往往也会导致在捷联惯组处产生细微的线晃动（出现线加速度）。常见的晃动干扰环境中，重力加速度与晃动线加速度的比值一般远远大于地球自转角速率与晃动角速率的比值，因此，虽然线晃动对新对准方法有影响，但是其量级比角晃动对常规粗对准方法的影响小得多。也就是说，新对准方法将常规对准方法对角晃动的敏感转变为了对线晃动的敏感，幸运的是，通常情况下运载体的线晃动不大，它对新对准方法影响小，因而新方法的初始对准精度高。

3.4.2 晃动干扰基座初始对准试验

采用激光捷联惯组作初始对准试验，其中激光陀螺随机漂移稳定性为 $0.01^\circ/h$ ，加速度计零偏稳定性为 $5 \times 10^{-5}g$ 。将捷联惯组安装在载车上，启动稳定后，首先载车保持静止 300s，之后，试验人员进行开关车门、上下车和车上走动等活动，施加干扰 180s，将上述共计 480s 的陀螺和加速度计采样数据存盘，作事后处理。事后处理分三种情况：

①取从 0s 到 300s 的原始数据，利用传统解析式初始对准方法作静态初始对准，随后从 300s 到 480s 进行姿态跟踪解算，姿态跟踪阶段捷联惯导姿态角输出

如图 3-2~图 3-6 中蓝色实线所示, 它如实反映了载车受到的角晃动干扰, 由图可见水平姿态角晃动幅值达 0.5° 而方位角才 0.05° , 将以此姿态角作为其它对准结果比较的参考;

②利用从 300s 到 480s 的数据, 进行 180s 晃动干扰基座下初始对准试验, 试验结果姿态角如图 3-2~图 3-4 中绿色点划线所示;

③利用从 300s 到 480s 的数据, 用传统解析式初始对准方法作初始对准, 结果如图 3-2、图 3-3 和图 3-5 中红色虚线所示。

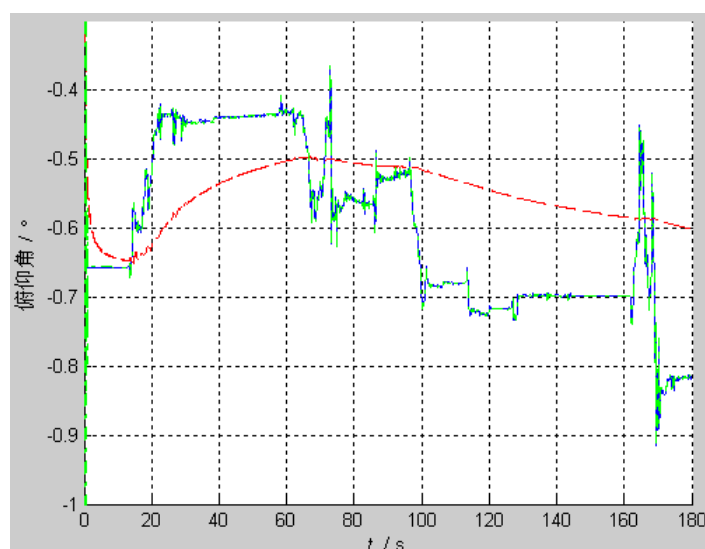


图 3-2 俯仰角

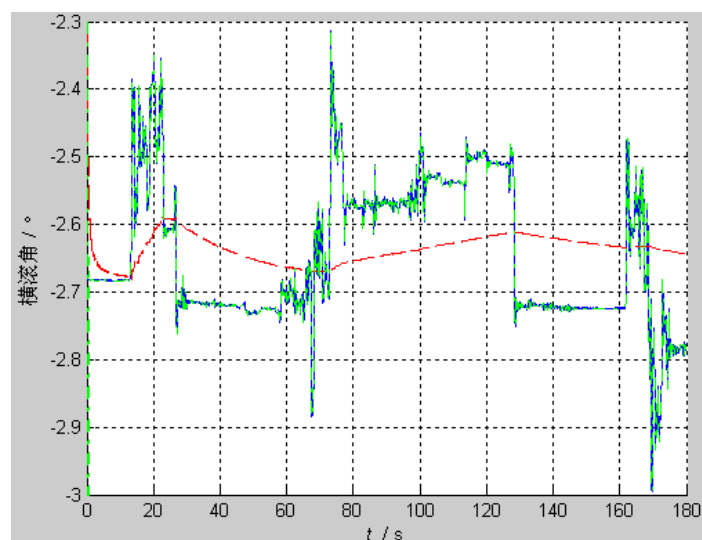


图 3-3 横滚角

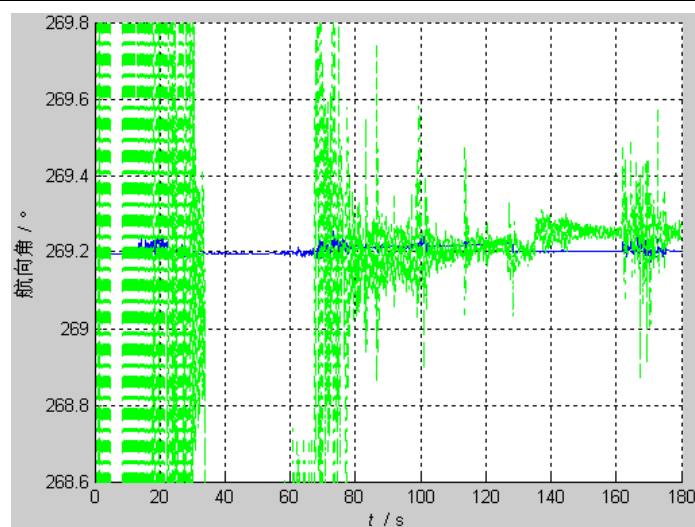


图 3-4 方位角

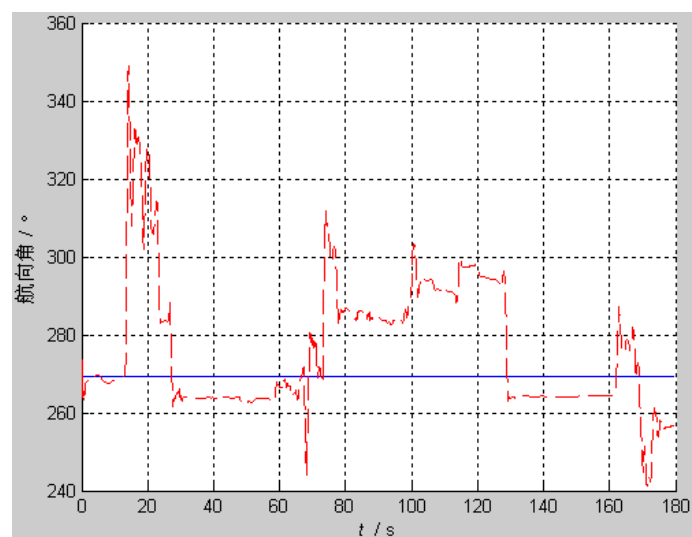


图 3-5 传统解析式初始对准方位角

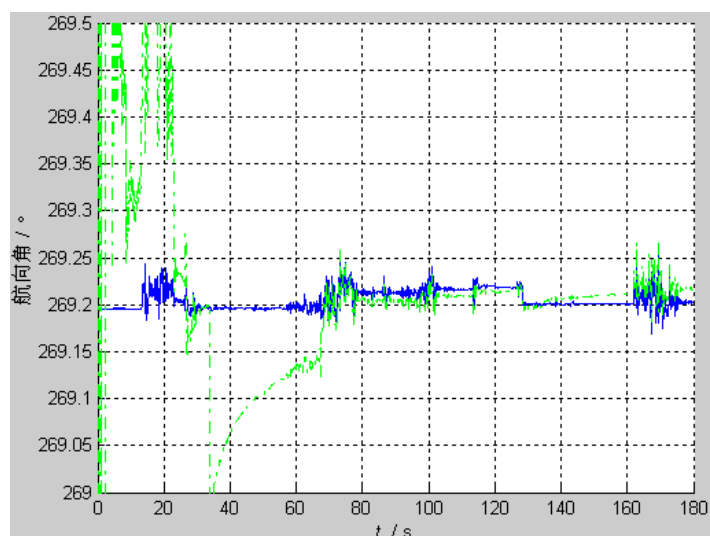


图 3-6 二次积分晃动干扰基座下初始对准方位角

从图 3-2 和图 3-3 中可以看出, 晃动干扰基座下初始对准方法的水平姿态角收敛快, 并且具有很好的晃动干扰跟踪能力, 对准精度高, 而传统解析式初始对准方法在受干扰时只能求得平均水平姿态角, 反映不出实时的水平姿态角。比较图 3-4 和图 3-5, 从图 3-4 中可以看出, 晃动干扰基座下初始对准方法在 70s 后具有较好的方位角对准精度和抗晃动干扰能力, 但是它在干扰时还存在一定的对准噪声 (90s 后小于 0.4°), 这主要是由于晃动时杆臂速度等因素造成的; 而图 3-5 显示传统解析式初始对准方法在干扰情况下方位对准误差很大 (由于惯组方位角约 270° , 图 3-5 中传统对准方位角与图 3-3 中真实横滚角曲线变化趋势大致相同, 这说明传统对准方位角随绕东西轴向的角晃动干扰影响特别严重, 这种角晃动相当于产生了很大的等效东向陀螺漂移), 90s 后最大误差大约 30° , 比较结果表明了抗晃动干扰初始对准方法的优越性。进一步数据处理结果表明, 如果对 (3-37a) 式作二次积分后再求变换矩阵 $C_{i_{b0}}^{i_0}$, 将有助于大幅度削弱晃动干扰中加速度计测量对方位角对准精度的影响, 数据处理结果如图 3-6 所示, 绿色虚线表示进行二次积分后晃动干扰基座下初始对准的方位角, 蓝色实线为真实值, 从中可见, 初始对准方位角也具备了很好的晃动干扰跟踪能力, 70s 后对方位角对准精度优于 0.02° , 可以满足捷联惯组高精度对准的要求。

3.5 本章小结

本章所提动基座初始对准方法以惯性空间为参考基准, 将初始对准姿态矩阵 $C_b^n(t)$ 的实现分解成 $C_{i_0}^n(t)$ 、 $C_b^{i_{b0}}(t)$ 和常值矩阵 $C_{i_{b0}}^{i_0}$ 三部分: $C_{i_0}^n(t)$ 由运载体地理位置和初始对准时间确定; 利用陀螺测量输出求解矩阵 $C_b^{i_{b0}}(t)$, $C_b^{i_{b0}}(t)$ 的更新求解过程隐含了对角运动的隔离; 经过惯导比力方程的变换, 利用里程计测量 (或 GPS 信息)、加速度计输出和重力加速度在 i_{b0} 系和 i_0 系间的变换关系求取 $C_{i_{b0}}^{i_0}$ 。实际应用中, 里程计辅助测量更具实用性, 而经过对 GPS 辅助情况下的动基座对准积分方法和误差分析, 提出了利用停车准确零速信息提高初始对准精度的方法, 具有一定的理论指导意义, 它表明了决定初始对准精度的瓶颈所在——积分起止时刻的辅助速度测量精度。同理, GPS 辅助对准的积分方法和误差分析也适用于里程计辅助情况, 因此提出了在里程计辅助对准中先利用罗经水平对准计算精确运载体速度, 再进行辅助对准的观点。

第四章 大失准角下的 SINS 初始对准技术

4.1 引言

误差传播模型和滤波算法是研究捷联惯导系统 (SINS) 初始对准中的两个重要问题。

SINS 的误差源通常包含惯性器件测量误差、初始条件误差、环境模型误差 (或地球模型误差) 以及数值算法误差等, SINS 误差模型是研究 SINS 误差传播特性和进行多导航系统间信息融合的基础, 它在初始对准和组合导航等应用方面起着重要的作用。描述 SINS 算法的数学方程是一组非线性微分方程, 在经典的小失准角 (数学平台误差角) SINS 误差模型中, 基于 ϕ 角法或 ψ 角法给 SINS 方程一个小的扰动以表示误差因素造成的影响, 从而推导出一组线性微分方程误差模型^[2]。小失准角 SINS 线性误差模型只有在假设各种误差源较小的条件下才成立, 随着 SINS 技术应用要求的提高, 以大失准角下进行初始对准最具代表性, 及非线性滤波估计技术研究的发展, SINS 误差模型的研究不再局限于线性模型, 一些新的误差模型不断涌现^[27-31], 如大方位失准角误差模型、基于四元数的误差模型和基于对偶四元数的误差模型等。大方位失准角误差模型是非线性的, 它要求水平失准角是小量; 基于四元数的误差模型中代表姿态的误差方程可以是线性的, 但是误差四元数的各分量物理意义不明确, 它还增加了误差模型的维数, 并且表示速度误差的误差方程依然是非线性的; 基于对偶四元数的误差模型也存在维数增加的问题, 它必然使滤波计算量增大, 尚未见有关该误差模型应用的文献报道。

本章打算沿着小失准角误差模型和大方位失准角误差模型的思路, 继续利用失准角的方法来描述 SINS 数学平台误差, 同时使其适用于大失准角误差的情形。在小失准角误差模型中可以认为三个失准角之间是与转动先后顺序无关的, 即可交换的, 但是在失准角误差模型中必须摒弃这一做法, 为了不易引起误解, 本章使用欧拉平台误差角来表示从理论导航坐标系到计算导航坐标系之间的三个失准角。利用欧拉平台误差角表示数学平台误差, 其物理意义是非常明确的。本章利用欧拉平台误差角推导 SINS 非线性误差模型, 并在大方位失准角误差和小失准角误差条件下作适当简化, 简化结果比已有文献中的大方位失准角误差模型更加全面和准确, 而与经典小失准角误差模型完全相同; 还提出利用外界阻尼信息改变捷联惯导算法结构的阻尼 SINS 算法及其误差模型, 它在初始对准中有着很强

的实用性，同时有利于减小计算量；此外，还对大欧拉平台误差角下SINS误差模型进行了准确性仿真检验。

在非线滤波方面，扩展卡尔曼滤波（EKF）应用最为广泛，EKF滤波的基本原理是对非线性函数进行线性化近似，即忽略非线性函数泰勒（Taylor）展开式高阶项的影响，在使用EKF时必须知道非线性函数的具体展开式，由EKF还引伸出了高阶截断EKF、迭代EKF等改进算法。EKF滤波的出发点是近似非线性函数，但是一般近似非线性函数的概率密度分布比近似非线性函数更加容易，目前，基于近似概率密度分布的滤波估计方法比较流行，如粒子滤波（PF），它可以不必详细了解非线性函数的具体展开式，而直接通过粒子（样本点）求解非线性函数来演化概率密度分布。UKF（unscented Kalman filter）可以算是PF家族中的一种特例，UKF的独特之处在于采用确定性采样策略近似非线性分布，相对一般PF滤波来说UKF的粒子数比较少，具有计算量小的突出优点，更便于实用^[32-35]。

当系统模型噪声和量测噪声均为复杂加性噪声时，本章还推导UKF滤波算法公式。进一步的，当量测方程是线性方程时，推导了简化的UKF滤波方法，简化UKF滤波公式显示：除通过非线性状态方程使用UT变换进行状态及其方差预测外，其它滤波步骤与标准Kalman滤波完全相同，但是与常规UKF相比，简化UKF滤波更有利于降低滤波计算量。

4.2 SINS 非线性误差方程

导航坐标系 n 系先后依次经过三次欧拉角转动至捷联惯导坐标系 b 系，这三个欧拉角分别记为方位角 $\psi \in (-\pi \ \pi]$ 、俯仰角 $\theta \in [-\pi/2 \ \pi/2]$ 和横滚角 $\gamma \in (-\pi \ \pi]$ ， n 系与 b 系之间的旋转变换关系用姿态矩阵 C_b^n 描述。需要注意的是，为了分析大误差角的方便，本章的方位角取值范围与本报告其它章节或文献[40]不同。

4.2.1 经典 SINS 微分方程

经典 SINS 微分方程组包含姿态矩阵微分方程、速度微分方程和位置微分方程三部分，即

$$\dot{C}_b^n = C_b^n (\omega_{nb}^b \times) \quad (4-1a)$$

$$\dot{\mathbf{v}}^n = C_b^n \mathbf{f}_{sf}^b - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times \mathbf{v}^n + \mathbf{g}^n \quad (4-1b)$$

$$\dot{L} = \frac{v_N^n}{R_M + h}, \quad \dot{\lambda} = \frac{v_E^n \sec L}{R_N + h}, \quad \dot{h} = v_U^n \quad (4-1c)$$

其中运算符 $(V \times)$ 表示由矢量 V 构成的反对称矩阵, $v^n = [v_E^n \ v_N^n \ v_U^n]^T$ 、 L 、 λ 、 h 分别表示 SINS 速度、纬度、经度和高度, R_M 、 R_N 分别为当地子午圈和卯酉圈曲率半径, 并且还有以下关系式

$$\omega_{nb}^b = \omega_{ib}^b - C_n^b \omega_{in}^n \quad (4-2a)$$

$$\omega_{in}^n = \omega_{ie}^n + \omega_{en}^n \quad (4-2b)$$

$$\omega_{ie}^n = [0 \ \omega_{ie} \cos L \ \omega_{ie} \sin L]^T \quad (4-2c)$$

$$\omega_{en}^n = [-\dot{L} \ \dot{\lambda} \cos L \ \dot{\lambda} \sin L]^T \quad (4-2d)$$

$$g^n = [0 \ 0 \ -g]^T \quad (4-2e)$$

其中 g 、 ω_{ie} 分别是当地重力加速度大小和地球自转角速率大小, ω_{ib}^b 、 f_{sf}^b 分别表示理想陀螺角速度输出和加速度计比力输出。

4.2.2 欧拉平台误差角微分方程

由于各种误差源的影响, 实际上 SINS 模拟的数学平台与理想导航坐标系 n 系 (即理想数学平台) 之间存在转动误差, 记实际数学平台为 n' 系, 也可称之为计算平台坐标系。与 n 系至 b 系的转动过程类似, n 系先后依次经过三次转动可得 n' 系, 假设这三次转动角分别为 α_z 、 α_x 和 α_y (在本报告其它章节中三个失准角表示为 ϕ_E 、 ϕ_N 和 ϕ_U , 含义是相同的), 称它们为欧拉平台误差角, 并且记矢量 $\alpha = [\alpha_x \ \alpha_y \ \alpha_z]^T$, 则有坐标变换矩阵

$$C_{\alpha_z} = \begin{bmatrix} c\alpha_z & s\alpha_z & 0 \\ -s\alpha_z & c\alpha_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_{\alpha_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_x & s\alpha_x \\ 0 & -s\alpha_x & c\alpha_x \end{bmatrix}, \quad C_{\alpha_y} = \begin{bmatrix} c\alpha_y & 0 & -s\alpha_y \\ 0 & 1 & 0 \\ s\alpha_y & 0 & c\alpha_y \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

上述式中使用了简写符号: $s\alpha_i$ 、 $c\alpha_i$ 分别表示 $\sin(\alpha_i)$ 和 $\cos(\alpha_i)$ ($i = x, y, z$), 若将 (4-3) 式三个矩阵逆序相乘得 n 系至 n' 系的变换矩阵

$$C_n^{n'} = C_{\alpha_y} C_{\alpha_x} C_{\alpha_z} = \begin{bmatrix} c\alpha_y c\alpha_z - s\alpha_y s\alpha_x s\alpha_z & c\alpha_y s\alpha_z + s\alpha_y s\alpha_x c\alpha_z & -s\alpha_y c\alpha_x \\ -c\alpha_x s\alpha_z & c\alpha_x c\alpha_z & s\alpha_x \\ s\alpha_y c\alpha_z + c\alpha_y s\alpha_x s\alpha_z & s\alpha_y s\alpha_z - c\alpha_y s\alpha_x c\alpha_z & c\alpha_y c\alpha_x \end{bmatrix} \quad (4-4)$$

若假设 n' 系相对于 n 系的角速度为 $\omega_{nn'}^{n'}$, 则可得 $\omega_{nn'}^{n'}$ 与欧拉平台误差角 α 之间的关系为

$$\boldsymbol{\omega}_{nn'}^{n'} = \mathbf{C}_{\alpha_y} \mathbf{C}_{\alpha_x} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha}_z \end{bmatrix} + \mathbf{C}_{\alpha_y} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\alpha}_y \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{\omega} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_x \\ \dot{\alpha}_y \\ \dot{\alpha}_z \end{bmatrix} \quad (4-5)$$

从而由 (4-5) 式得欧拉平台误差角微分方程

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{C}_{\omega}^{-1} \boldsymbol{\omega}_{nn'}^{n'} \quad (4-6)$$

其中有

$$\mathbf{C}_{\omega} = \begin{bmatrix} c\alpha_y & 0 & -s\alpha_y c\alpha_x \\ 0 & 1 & s\alpha_x \\ s\alpha_y & 0 & c\alpha_y c\alpha_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\omega}^{-1} = \frac{1}{c\alpha_x} \begin{bmatrix} c\alpha_y c\alpha_x & 0 & s\alpha_y c\alpha_x \\ s\alpha_y s\alpha_x & c\alpha_x & -c\alpha_y s\alpha_x \\ -s\alpha_y & 0 & c\alpha_y \end{bmatrix} \quad (4-7)$$

欧拉平台误差角微分方程 (4-6) 式描述了欧拉平台误差角与计算平台坐标系角运动之间的关系, 下面将进一步推导计算平台坐标系角运动速度 $\boldsymbol{\omega}_{nn'}^{n'}$ 的规律, 从而建立起以欧拉平台误差角 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示的 SINS 误差模型。

4.2.3 SINS 姿态误差方程

理论上, SINS 姿态矩阵微分方程为 (4-1a) 式, 而实际上用于姿态更新的微分方程是带误差的, 它可表示为

$$\dot{\mathbf{C}}_b^{n'} = \mathbf{C}_b^{n'} (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{nb}^b \times) \quad (4-8)$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{nb}^b = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b - \mathbf{C}_{n'}^b \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{in}^n = (\boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) - \mathbf{C}_{n'}^b (\boldsymbol{\omega}_{in}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n) \quad (4-9)$$

$\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ 为陀螺测量误差, $\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n$ 为 $\boldsymbol{\omega}_{in}^n$ 的计算误差且 $\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n = \delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n$ 。现定义姿态矩阵的加性计算误差为

$$\Delta\mathbf{C} = \mathbf{C}_b^{n'} - \mathbf{C}_b^n = \mathbf{C}_b^{n'} - \mathbf{C}_{n'}^n \mathbf{C}_b^{n'} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}_{n'}^n) \mathbf{C}_b^{n'} \quad (4-10)$$

一方面, 对 $\Delta\mathbf{C} = \mathbf{C}_b^{n'} - \mathbf{C}_b^n$ 两边同时微分, 并将 (4-1a) 式和 (4-8) 式代入得

$$\Delta\dot{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{C}}_b^{n'} - \dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^{n'} (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{nb}^b \times) - \mathbf{C}_b^n (\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times) \quad (4-11)$$

另一方面, 对 $\Delta\mathbf{C} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}_{n'}^n) \mathbf{C}_b^{n'}$ 两边同时微分, 并将 (4-8) 式代入得

$$\Delta\dot{\mathbf{C}} = -\dot{\mathbf{C}}_{n'}^n \mathbf{C}_b^{n'} + (\mathbf{I} - \mathbf{C}_{n'}^n) \dot{\mathbf{C}}_b^{n'} = -\dot{\mathbf{C}}_{n'}^n \mathbf{C}_b^{n'} + (\mathbf{I} - \mathbf{C}_{n'}^n) \mathbf{C}_b^{n'} (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{nb}^b \times) \quad (4-12)$$

令 (4-11) 式和 (4-12) 式右端相等, 得

$$\dot{\mathbf{C}}_{n'}^n \mathbf{C}_b^{n'} + \mathbf{C}_{n'}^n \mathbf{C}_b^{n'} (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{nb}^b \times) - \mathbf{C}_b^n (\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times) = \mathbf{0} \quad (4-13)$$

再把矩阵微分方程 $\dot{\mathbf{C}}_{n'}^n = \mathbf{C}_{n'}^n (\boldsymbol{\omega}_{nn'}^{n'} \times)$ 代入 (4-13) 式, 并将其两边同时左乘 $\mathbf{C}_{n'}^n$ 和右

乘 $C_{n'}^b$, 得

$$(\omega_{nn'}^{n'} \times) + C_b^{n'} (\tilde{\omega}_{nb}^b \times) C_{n'}^b - C_b^{n'} (\omega_{nb}^b \times) C_{n'}^b = 0 \quad (4-14)$$

利用反对称阵相似变换以及反对称阵与矢量之间的关系, 矩阵等式 (4-14) 式可等价成矢量等式

$$\omega_{nn'}^{n'} + C_b^{n'} (\tilde{\omega}_{nb}^b - \omega_{nb}^b) = 0 \quad (4-15)$$

将 (4-2a) 式和 (4-9) 式代入 (4-15) 式, 整理得

$$\omega_{nn'}^{n'} = (I - C_n^{n'}) \tilde{\omega}_{in}^n + C_n^{n'} \delta \omega_{in}^n - C_b^{n'} \delta \omega_{ib}^b \quad (4-16)$$

最后, 将 (4-16) 式代入 (4-6) 式得以欧拉平台误差角表示的 SINS 非线性姿态误差方程

$$\dot{\alpha} = C_\omega^{-1} [(I - C_n^{n'}) \tilde{\omega}_{in}^n + C_n^{n'} \delta \omega_{in}^n - C_b^{n'} \delta \omega_{ib}^b] \quad (4-17)$$

显然, 在一般条件下要将 (4-17) 式展开成分量的表达方式是比较复杂的。

4.2.4 SINS 速度误差方程

理论上, SINS 速度微分方程表示为 (4-1b) 式, 而实际上导航解算方程为

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}}^n = C_b^{n'} \tilde{\mathbf{f}}_{sf}^b - (2\tilde{\omega}_{ie}^n + \tilde{\omega}_{en}^n) \times \tilde{\mathbf{v}}^n + \tilde{\mathbf{g}}^n \quad (4-18)$$

其中设 $\tilde{\mathbf{v}}^n = \mathbf{v}^n + \delta \mathbf{v}^n$ 、 $\tilde{\mathbf{f}}_{sf}^b = \mathbf{f}_{sf}^b + \delta \mathbf{f}_{sf}^b$ 、 $\tilde{\omega}_{ie}^n = \omega_{ie}^n + \delta \omega_{ie}^n$ 、 $\tilde{\omega}_{en}^n = \omega_{en}^n + \delta \omega_{en}^n$ 、 $\tilde{\mathbf{g}}^n = \mathbf{g}^n + \delta \mathbf{g}^n$, $\delta \mathbf{f}_{sf}^b$ 为加速度计测量误差, 直接将 (4-18) 式减去 (4-1b) 式, 整理得 SINS 速度误差方程

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{v}}^n = \dot{\tilde{\mathbf{v}}}^n - \dot{\mathbf{v}}^n = & [I - (C_n^{n'})^T] C_b^{n'} \tilde{\mathbf{f}}_{sf}^b + (C_n^{n'})^T C_b^{n'} \delta \mathbf{f}_{sf}^b \\ & - (2\delta \omega_{ie}^n + \delta \omega_{en}^n) \times \tilde{\mathbf{v}}^n - (2\tilde{\omega}_{ie}^n + \tilde{\omega}_{en}^n) \times \delta \mathbf{v}^n + (2\delta \omega_{ie}^n + \delta \omega_{en}^n) \times \delta \mathbf{v}^n + \delta \mathbf{g}^n \end{aligned} \quad (4-19)$$

注意, 如果仅从 (4-18) 式右端比力变换的观点看, 计算速度 $\tilde{\mathbf{v}}^n$ 可以看成是在 n' 系投影的, 也可写成 $\mathbf{v}^{n'}$, 然而后面两项 $(2\tilde{\omega}_{ie}^n + \tilde{\omega}_{en}^n) \times \tilde{\mathbf{v}}^n$ 和 $\tilde{\mathbf{g}}^n$ 又不能算是投影在 n' 系下, 所以, 可以说 $\tilde{\mathbf{v}}^n$ 仅仅是一种解算结果而已, 不能确切说明它是在哪个坐标系下表示的, 从而致使 $\delta \mathbf{v}^n$ 表示的坐标系也不明确。只有在小失准角误差条件下, n 系与 n' 系近似重合, 向量在这两坐标下的投影值是近似相等的, 因此, 可以认为 $\delta \mathbf{v}^n$ 是在 n 系下表示的。

在 (4-17) 式和 (4-19) 式中的计算参数误差 $\delta \omega_{ie}^n$ 和 $\delta \omega_{en}^n$ 具体表示为

$$\delta \omega_{ie}^n = \tilde{\omega}_{ie}^n - \omega_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{ie} [\cos \tilde{L} - \cos(\tilde{L} - \delta L)] \\ \omega_{ie} [\sin \tilde{L} - \sin(\tilde{L} - \delta L)] \end{bmatrix} \quad (4-20a)$$

$$\delta \omega_{en}^n = \tilde{\omega}_{en}^n - \omega_{en}^n = \begin{bmatrix} -\delta \dot{L} \\ \dot{\tilde{\lambda}} \cos \tilde{L} - (\dot{\tilde{\lambda}} - \delta \dot{\lambda}) \cos(\tilde{L} - \delta L) \\ \dot{\tilde{\lambda}} \sin \tilde{L} - (\dot{\tilde{\lambda}} - \delta \dot{\lambda}) \sin(\tilde{L} - \delta L) \end{bmatrix} \quad (4-20b)$$

其中 $\tilde{L} = L + \delta L$ 、 $\tilde{\lambda} = \lambda + \delta \lambda$ 。

4.2.5 SINS 位置误差方程

SINS 位置微分方程为 (4-1c) 式，直接求计算值与真实值之间的误差，得 SINS 位置误差微分方程

$$\delta \dot{L} = \dot{\tilde{L}} - \dot{L} = \frac{\tilde{v}_N^n}{\tilde{R}_M + \tilde{h}} - \frac{\tilde{v}_N^n - \delta v_N^n}{(\tilde{R}_M - \delta R_M) + (\tilde{h} - \delta h)} \quad (4-21a)$$

$$\delta \dot{\lambda} = \dot{\tilde{\lambda}} - \dot{\lambda} = \frac{\tilde{v}_E^n \sec \tilde{L}}{\tilde{R}_N + \tilde{h}} - \frac{(\tilde{v}_E^n - \delta v_E^n) \sec(\tilde{L} - \delta L)}{(\tilde{R}_N - \delta R_N) + (\tilde{h} - \delta h)} \quad (4-21b)$$

$$\delta \dot{h} = \dot{\tilde{h}} - \dot{h} = \tilde{v}_U^n - v_U^n = \delta v_U^n \quad (4-21c)$$

其中 $\tilde{h} = h + \delta h$ 、 $\tilde{R}_M = R_M + \delta R_M$ 、 $\tilde{R}_N = R_N + \delta R_N$ 。欲求得 δR_M 和 δR_N 解析式是很困难和复杂的，但一般情况下它们在 (4-21) 式中的影响很小，可以将它们都近似为 0。至此，由 (4-17)、(4-19) 和 (4-21) 式构成了一套完整的 SINS 非线性误差模型，在推导过程中未作欧拉平台误差角是小量的假设，因此只要保证 (4-7) 式中的 $c\alpha_x$ 不为 0，那么该模型就适用于欧拉平台误差角为任何值的情况，它均能精确地反映出 SINS 的误差传播特性。

需要指出的是，如果纬度误差 δL 和高度误差 δh 是小量，并且有 $\delta h \ll \tilde{R}_M + \tilde{h}$ 和 $\delta h \ll \tilde{R}_N + \tilde{h}$ 成立的话，那么就可对 (4-20) 式和 (4-21) 式实施近似简化，简化为关于误差量的线性方程，即

$$\delta \omega_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_{ie} \sin \tilde{L} \delta L \\ \omega_{ie} \cos \tilde{L} \delta L \end{bmatrix}, \quad \delta \omega_{en}^n = \begin{bmatrix} -\delta v_N^n / (\tilde{R}_M + \tilde{h}) \\ \delta \dot{\lambda} \cos \tilde{L} - \dot{\tilde{\lambda}} \sin \tilde{L} \delta L \\ \delta \dot{\lambda} \sin \tilde{L} + \dot{\tilde{\lambda}} \cos \tilde{L} \delta L \end{bmatrix} \quad (4-20')$$

$$\delta \dot{L} = \frac{1}{\tilde{R}_M + \tilde{h}} \delta v_N^n, \quad \delta \dot{\lambda} = \frac{\sec \tilde{L}}{\tilde{R}_N + \tilde{h}} \delta v_E^n + \frac{\tilde{v}_E^n \sec \tilde{L} \tan \tilde{L}}{\tilde{R}_N + \tilde{h}} \delta L, \quad \delta \dot{h} = \delta v_U^n \quad (4-21')$$

4.3 SINS 误差模型的简化与准确性仿真

显然，要将 SINS 非线性误差模型按各个分量展开，尤其是对于姿态误差方程而言，是比较复杂的，但是，在某些条件下可对它进行简化，使其满足特定的

应用场合。在以下分析中均假设陀螺测量误差 $\delta\omega_{ib}^b$ 主要为漂移误差 ε^b 、加速度计测量误差 δf_{sf}^b 主要为偏置误差 ∇^b ，忽略重力误差项 δg^n 影响，并记 $\varepsilon^{n'} = C_b^{n'} \varepsilon^b$ 、 $\nabla^{n'} = C_b^{n'} \nabla^b$ 和 $\tilde{f}_{sf}^{n'} = C_b^{n'} \tilde{f}_{sf}^b$ 。

4.3.1 大方位失准角下的 SINS 误差模型

在大方位失准角条件下，假设欧拉平台误差角中 α_x 和 α_y 是小量，而 α_z 是任意值，则近似有 $s\alpha_x \approx \alpha_x$ 、 $c\alpha_x \approx 1$ 、 $s\alpha_y \approx \alpha_y$ 、 $c\alpha_y \approx 1$ 和

$$C_\omega^{-1} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha_y \\ 0 & 1 & -\alpha_x \\ -\alpha_y & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_n^{n'} \approx \begin{bmatrix} c\alpha_z & s\alpha_z & -\alpha_y \\ -s\alpha_z & c\alpha_z & \alpha_x \\ \alpha_y c\alpha_z + \alpha_x s\alpha_z & \alpha_y s\alpha_z - \alpha_x c\alpha_z & 1 \end{bmatrix} \quad (4-22)$$

将这些近似值代入 (4-17) 式和 (4-19) 式，除方位误差外略去关于其它误差量的高阶项，得

$$\dot{\alpha} = C_A \tilde{\omega}_{in}^n + C_{\alpha_z} \delta\omega_{in}^n - \varepsilon^{n'} \quad (4-23a)$$

$$\delta\dot{v}^n = C_B \tilde{f}_{sf}^{n'} + C_{\alpha_z}^T \nabla^{n'} - (2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) \times \tilde{v}^n - (2\tilde{\omega}_{ie}^n + \tilde{\omega}_{en}^n) \times \delta v^n \quad (4-23b)$$

其中有

$$C_A = C_\omega^{-1} (I - C_n^{n'}) \approx \begin{bmatrix} 1 - c\alpha_z & -s\alpha_z & \alpha_y \\ s\alpha_z & 1 - c\alpha_z & -\alpha_x \\ -\alpha_x s\alpha_z - \alpha_y & \alpha_x c\alpha_z & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_B = I - (C_n^{n'})^T \approx \begin{bmatrix} 1 - c\alpha_z & s\alpha_z & -\alpha_y c\alpha_z - \alpha_x s\alpha_z \\ -s\alpha_z & 1 - c\alpha_z & -\alpha_y s\alpha_z + \alpha_x c\alpha_z \\ \alpha_y & -\alpha_x & 0 \end{bmatrix}$$

值得注意的是，在 (4-23a) 式中 $\delta\omega_{in}^n$ 前有误差分配矩阵 C_{α_z} ，该矩阵在文献 [11-13, 28] 中是没有的，作者认为那是不恰当的，因为 α_z 并非小量，不能将 C_{α_z} 近似成单位阵。

4.3.2 小失准角的 SINS 误差方程

在小失准角条件下，三个欧拉平台误差角均为小量，近似有 $C_A \approx (\alpha \times)$ 、 $C_B \approx -(\alpha \times)$ 和 $C_{\alpha_z} \approx I$ ，所以 (4-23) 式进一步近似为

$$\dot{\alpha} = -\tilde{\omega}_{in}^n \times \alpha + \delta\omega_{in}^n - \varepsilon^{n'} \quad (4-24a)$$

$$\delta\dot{v}^n = \tilde{f}_{sf}^{n'} \times \alpha + \nabla^{n'} - (2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) \times \tilde{v}^n - (2\tilde{\omega}_{ie}^n + \tilde{\omega}_{en}^n) \times \delta v^n \quad (4-24b)$$

可见, (4-24) 式与其它文献中小失准角 SINS 线性误差方程是完全相同的。

在本小节分析过程中, $\delta\omega_{en}^n$ 、 $\delta\omega_{en}^n$ 及位置误差的计算公式同 (4-20') 式和 (4-21') 式, 不再重复。

4.3.3 阻尼 SINS 算法及其误差模型

前面分析的是完整的纯捷联惯导算法及其误差模型, 若改变捷联惯导算法的结构, 比如将外界阻尼信息引入算法, 会得到更为简洁的误差模型, 暂且称之为阻尼 SINS 算法和阻尼 SINS 误差模型, 阻尼 SINS 算法及其误差模型在初始对准中有着重要的实用价值。例如在进行 SINS 与 GPS 组合动基座初始对准中, GPS 可提供比较准确的速度 $\mathbf{v}_g^n$ 和位置 L_g 、 λ_g 、 h_g 信息; 或者在进行 SINS 准静基座 (无线运动或线运动很小但可有角运动) 初始对准过程中, 参考速度为零且地理位置准确已知。在上述两种情况下均可将参考速度或位置信息引入捷联惯导算法, 下面以 GPS 阻尼为例简化 SINS 误差模型, 而准静基座情况类似。

建立 GPS 阻尼 SINS 算法的基本方法是, 在 (4-1) 式右端以已知的 GPS 信息求取与速度和位置有关的计算参量, 即将 (4-1) 式改写成

$$\dot{\mathbf{C}}_b^{n'} = \mathbf{C}_b^{n'} (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{nb}^b \times) \quad (4-25a)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}}^n = \mathbf{C}_b^{n'} \tilde{\mathbf{f}}_{sf}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ie,g}^n + \boldsymbol{\omega}_{en,g}^n) \times \mathbf{v}_g^n + \mathbf{g}_g^n \quad (4-25b)$$

$$\dot{\tilde{L}} = \frac{\tilde{v}_N^n}{R_{M,g} + h_g}, \quad \dot{\tilde{\lambda}} = \frac{\tilde{v}_E^n \sec L_g}{R_{N,g} + h_g}, \quad \dot{\tilde{h}} = \tilde{v}_U^n \quad (4-25c)$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{nb}^b = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b - \mathbf{C}_n^b \boldsymbol{\omega}_{in,g}^n$, 下标中含符号 g 的项表示由 GPS 信息计算获得的, 如果认为 GPS 信息误差很小可以忽略其影响, 并将与之有关的计算参量等效于真实值, 或者说无误差, 则类似于推导纯捷联惯导算法误差模型的方法, 或在纯捷联惯导算法误差模型基础上进行适当简化, 可得与阻尼 SINS 算法 (4-25) 式对应的误差模型为

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{C}_\omega^{-1} [(\mathbf{I} - \mathbf{C}_n^{n'}) \boldsymbol{\omega}_{in,g}^n - \boldsymbol{\varepsilon}^{n'}] \quad (4-26a)$$

$$\delta \dot{\mathbf{v}}^n = [\mathbf{I} - (\mathbf{C}_n^{n'})^T] \tilde{\mathbf{f}}_{sf}^{n'} + (\mathbf{C}_n^{n'})^T \nabla^{n'} \quad (4-26b)$$

$$\delta \dot{L} = \frac{1}{R_{M,g} + h_g} \delta v_N^n, \quad \delta \dot{\lambda} = \frac{\sec L_g}{R_{N,g} + h_g} \delta v_E^n, \quad \delta \dot{h} = \delta v_U^n \quad (4-26c)$$

由 (4-26) 式可见, 欧拉平台误差角 $\boldsymbol{\alpha}$ 微分方程中不含速度误差和位置误差信息、速度误差 $\delta \mathbf{v}^n$ 微分方程中不含位置误差信息, 从欧拉平台误差角到速度误差再到

位置误差是一个“简单的直接累积”的过程，速度误差或位置误差中包含有欧拉平台误差角的信息，应用阻尼SINS算法（4-25）式及其误差模型（4-26）式进行初始对准有助于减小计算量和简化误差模型分析的复杂性。

在准静基座下假设 α_x 和 α_y 是小量，将（4-22）式代入（4-26）式求得大方位失准角下的阻尼SINS欧拉平台误差角和速度误差方程的展开式

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_x = -s\alpha_z\omega_N + \alpha_y\omega_U - \varepsilon_x^{n'} \\ \dot{\alpha}_y = (1-c\alpha_z)\omega_N - \alpha_x\omega_U - \varepsilon_y^{n'} \\ \dot{\alpha}_z = \alpha_x c\alpha_z\omega_N - \varepsilon_z^{n'} \\ \delta\dot{v}_x^n = (1-c\alpha_z)\hat{f}_{sfx}^{n'} + s\alpha_z\hat{f}_{sfy}^{n'} - (\alpha_y c\alpha_z + \alpha_x s\alpha_z)\hat{f}_{sfz}^{n'} + c\alpha_z\nabla_x^{n'} + s\alpha_z\nabla_y^{n'} \\ \delta\dot{v}_y^n = -s\alpha_z\hat{f}_{sfx}^{n'} + (1-c\alpha_z)\hat{f}_{sfy}^{n'} - (\alpha_y s\alpha_z - \alpha_x c\alpha_z)\hat{f}_{sfz}^{n'} - s\alpha_z\nabla_x^{n'} + c\alpha_z\nabla_y^{n'} \\ \delta\dot{v}_z^n = \alpha_y\hat{f}_{sfx}^{n'} - \alpha_x\hat{f}_{sfy}^{n'} + \nabla_z^{n'} \end{cases} \quad (4-27)$$

其中 $\omega_N = \omega_{ie} \cos L$ 、 $\omega_U = \omega_{ie} \sin L$ ，由于采用了速度阻尼SINS算法，（4-27）式右端不含速度误差项，并且式中 $\dot{\alpha}_z$ 方程右端与文献[28]中（4-42）式相比，前者少了 $-\alpha_y s\alpha_z\omega_N$ 项，是因为本文考虑了 C_ω^{-1} 的影响，作者认为这里的分析更加全面和准确。

还有，如果将（4-26b）式改写成

$$\begin{aligned} \delta\dot{\mathbf{v}}^n &= \mathbf{C}_b^{n'} \tilde{\mathbf{f}}_{sf}^b - \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}_{sf}^b = \mathbf{C}_n^{n'} \mathbf{C}_b^n (\mathbf{f}_{sf}^b + \nabla^b) - \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}_{sf}^b \\ &= (\mathbf{C}_n^{n'} - \mathbf{I}) \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}_{sf}^b + \nabla^{n'} \end{aligned} \quad (4-26b')$$

在静基座下有 $\mathbf{C}_b^n \mathbf{f}_{sf}^b = -\mathbf{g}^n$ ，展开上式，立即得

$$\begin{cases} \delta\dot{v}_x^n = -g\alpha_y + \nabla_x^{n'} \\ \delta\dot{v}_y^n = g\alpha_x + \nabla_y^{n'} \\ \delta\dot{v}_z^n = \nabla_z^{n'} \end{cases} \quad (4-27')$$

它比（4-27）式中的速度误差方程更加简洁，从（4-27'）式中容易理解，也可以把静基座下的速度误差 $\delta\mathbf{v}^n$ 的分量看作是在 n' 系的投影。

4.3.4 SINS 非线性误差模型准确性仿真

文献[12:p92-94]提到了状态方程（误差模型）准确性检验的问题，SINS 误差模型描述了 SINS 误差的传播特性，以 SINS 误差模型为滤波模型的状态估计效果直接与模型的准确性有关。本文为了验证 SINS 非线性误差模型的准确性，对由（4-26a）式和（4-26b）式组成的 GPS 辅助 SINS 初始对准的误差模型进行了仿真，仿真原理如图 4-1 所示，在给定轨迹、初始的欧拉平台误差角和速度误差

条件下，分别实施阻尼 SINS 算法及其非线性误差方程传播演算，最后比较两种误差算法结果之间的误差，误差计算公式为

$$\delta \mathbf{v}_{Err}^n = \delta \mathbf{v}^n - (\tilde{\mathbf{v}}^n - \mathbf{v}_g^n) \quad (4-28)$$

其中 $\delta \mathbf{v}^n$ 为非线性误差方程传播演算的速度误差、 $\tilde{\mathbf{v}}^n$ 为阻尼 SINS 算法的速度解算值、 $\mathbf{v}_g^n$ 为 GPS 速度（即真实轨迹的速度）。

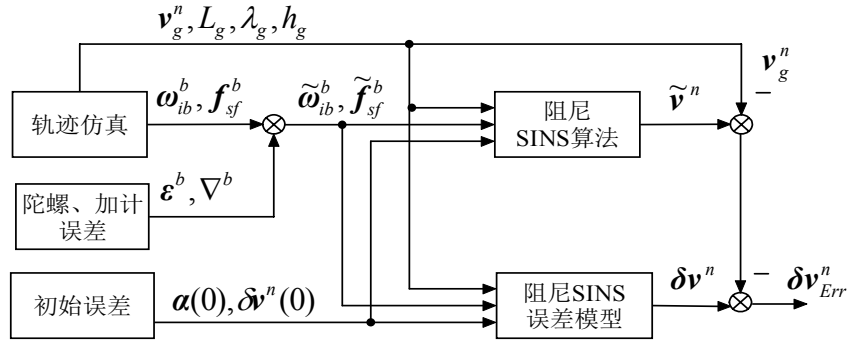


图 4-1 验证 SINS 非线性误差的仿真原理

轨迹仿真设计为以下五个阶段：

- ① 给定初始值 $L = 30^\circ$ 、 $\lambda = 0^\circ$ 、 $h = 100\text{m}$ 、 $\theta = \gamma = \psi = 0^\circ$ ，朝正北方向以 10m/s 行驶，匀速行驶 30s ；
- ② 以加速度 1m/s^2 加速 20s 至速度 30m/s ；
- ③ 匀速行驶 30s ；
- ④ 以 $9^\circ/\text{s}$ 角速度左转弯 10s 至方位角 90° （朝正西方向）；
- ⑤ 匀速行驶 30s ，共计仿真 120s 。

仿真中，陀螺漂移误差设为 $0.05^\circ/\text{h}$ 、加计偏置误差设为 $100\mu\text{g}$ ；初始误差设为 $\delta \alpha(0) = [30 \ 30 \ 180]^\text{T}^\circ$ 、 $\delta \mathbf{v}^n(0) = [0 \ -10 \ 0]^\text{T}\text{m/s}$ 。阻尼 SINS 解算误差 $\tilde{\mathbf{v}}^n - \mathbf{v}_g^n$ 如图 4-2 所示，误差量 $\delta \mathbf{v}_{Err}^n$ 如图 4-3 所示，其中实线、点划线、虚线分别是它们的东向、北向和天向分量。在图 4-3 中 80s – 90s 之间误差增大是由于转弯过程中非线性误差模型的积分算法误差引起的（仿真中采用欧拉积分法解算阻尼 SINS 误差模型并且步长为 0.001s ）。从图 4-2 中看出，当 α_x 和 α_y 高达 30° 时， 120s 时 SINS 的北向速度误差高达 600m/s ，而图 4-3 表明，阻尼 SINS 误差模型能完美反映 SINS 的速度误差特性，这是传统的大方位失准角和小失准角 SINS 误差模型无法企及的。

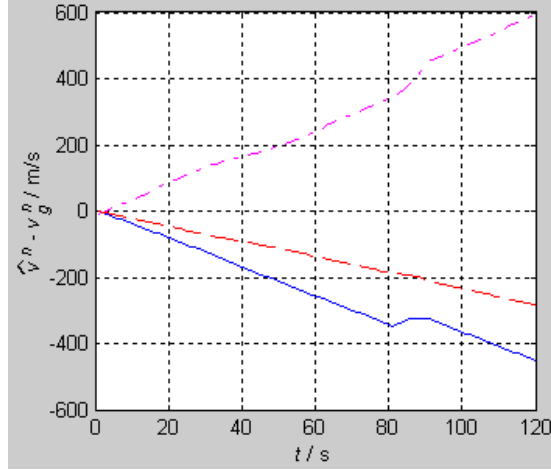


图 4-2 SINS 速度解算误差

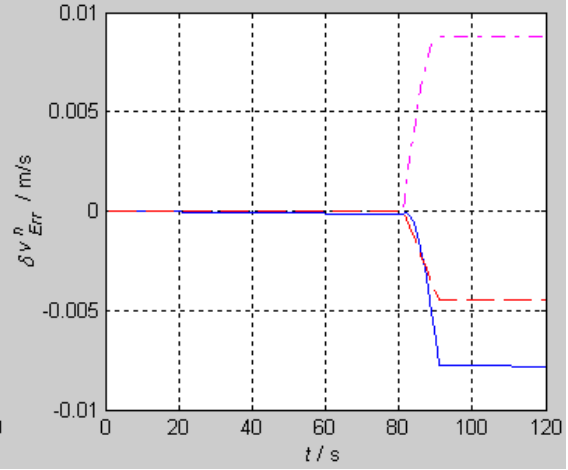


图 4-3 误差方程准确性

4.4 基于复杂加性噪声的 UKF 滤波

一般文献中所指的加性噪声滤波模型描述如下

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (4-29)$$

暂且称之为简单加性噪声，而本节中所指的复杂加性噪声模型表示为

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k-1})\mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{j}(\mathbf{x}_k)\mathbf{v}_k \end{cases} \quad (4-30)$$

其中 $\mathbf{f}(\bullet)$ 、 $\mathbf{g}(\bullet)$ 、 $\mathbf{h}(\bullet)$ 、 $\mathbf{j}(\bullet)$ 均可为非线性函数， $\mathbf{x}_k$ 、 $\mathbf{z}_k$ 分别是状态和量测向量， $\mathbf{w}_k$ 、 $\mathbf{v}_k$ 分别是状态和量测噪声向量，复杂加性噪声模型的特点是模型关于噪声是线性的。易知简单加性噪声是复杂加性噪声模型的特例，但后者使用范围更广。下面先简要介绍一下标准 Kalman 滤波方法。

4.4.1 标准 Kalman 滤波

离散线性系统状态方程和量测方程可用如下公式描述

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \Phi_{k|k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \Gamma_{k-1}\mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (4-31)$$

式中 $\mathbf{x}_k$ 、 $\mathbf{z}_k$ 分别为状态向量和量测向量， $\Phi_{k|k-1}$ 、 Γ_k 、 $\mathbf{H}_k$ 分别为状态转移矩阵、噪声分配矩阵和量测矩阵， $\mathbf{w}_k$ 、 $\mathbf{v}_k$ 分别为系统噪声和量测噪声且 $E[\mathbf{w}_k] = \mathbf{0}$ 、 $E[\mathbf{w}_k\mathbf{w}_j^T] = \delta_{kj}\mathbf{Q}_k$ 、 $E[\mathbf{v}_k] = \mathbf{0}$ 、 $E[\mathbf{v}_k\mathbf{v}_j^T] = \delta_{kj}\mathbf{R}_k$ ， $E[\mathbf{w}_k\mathbf{v}_j^T] = \mathbf{0}$ ， δ_{kj} 是狄拉克 (Dirac) 函数。利用量测 $\mathbf{z}_k$ 获得状态 $\mathbf{x}_k$ 最优估计值 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 的标准 Kalman 滤波递推过程由①状

态一步预测、②一步预测均方差阵、③滤波增益、④状态最优估计、⑤状态估计均方差阵等五个步骤构成，公式如下：

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \Phi_{k|k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\ \mathbf{P}_{k|k-1} = \Phi_{k|k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k|k-1}^T + \Gamma_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k-1}^T \\ \mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \\ \mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1} \end{cases} \quad (4-32)$$

若记量测预测为 $\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ 、状态预测误差与量测预测误差之间协方差为 $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{z}}_k} = E[(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{x}_k)(\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} - \mathbf{z}_k)^T]$ 、量测预测误差均方差为 $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{z}}_k \hat{\mathbf{z}}_k} = E[(\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} - \mathbf{z}_k)(\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} - \mathbf{z}_k)^T]$ ，则有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{z}}_k} &= E[(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{x}_k)(\mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{v}_k)^T] \\ &= E[(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{x}_k)(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{x}_k)^T] \mathbf{H}_k^T = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \end{aligned} \quad (4-33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{z}}_k \hat{\mathbf{z}}_k} &= E[(\mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{v}_k)(\mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{v}_k)^T] \\ &= \mathbf{H}_k E[(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{x}_k)(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{x}_k)^T] \mathbf{H}_k^T + E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \end{aligned} \quad (4-34)$$

将 (4-33) 式和 (4-34) 式代入 (4-32) 式中的滤波增益计算公式，所以 $\mathbf{K}_k$ 也可以表示成

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{z}}_k} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{z}}_k \hat{\mathbf{z}}_k}^{-1} \quad (4-35)$$

由 (4-35) 式两边右乘 $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{z}}_k \hat{\mathbf{z}}_k}$ 再转置得 $(\mathbf{K}_k \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{z}}_k})^T = \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{z}}_k}^T = (\mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T)^T$ ，由于 $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{z}}_k}$ 和 $\mathbf{P}_{k|k-1}$ 都是对称矩阵，所以有 $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{z}}_k} \mathbf{K}_k^T = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1}$ ，将其代入 (4-32) 式中的状态估计均方差阵 $\mathbf{P}_k$ 式得

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{z}}_k} \mathbf{K}_k^T \quad (4-36)$$

因此，Kalman滤波递推公式也可写成

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \Phi_{k|k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\ \mathbf{P}_{k|k-1} = \Phi_{k|k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k|k-1}^T + \Gamma_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k-1}^T \\ \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{z}}_k} = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T, \quad \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{z}}_k \hat{\mathbf{z}}_k} = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \\ \mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{z}}_k} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{z}}_k \hat{\mathbf{z}}_k}^{-1} \\ \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \quad \hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}) \\ \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{z}}_k} \mathbf{K}_k^T \end{cases} \quad (4-37)$$

4.4.2 简化 UKF 滤波

标准Kalman滤波是一种线性最小方差估计，使用状态方程描述被估计量的变化规律，状态方程由噪声驱动，它的状态估计算法是递推的，采用“预测—修正”的线性算法框架。UKF滤波也采用与标准Kalman滤波一样的算法结构。所不同的是，在Kalman滤波中可以直接通过线性方程确定状态统计量的转移，而UKF不行，后者必须借助于计算采样点来演化状态分布特性的转移。

UKF 滤波以 UT 变换为基础，精心选取有限个所谓 Sigma 采样点来近似系统状态的先验统计特性，再直接通过非线性方程演化系统状态的后验分布特性。在 UKF 滤波中，一般情况下必须对系统过程噪声和量测噪声进行状态增广，但是当系统噪声和量测噪声均为加性噪声时，可以不作增广处理，有利于减小滤波计算量。现将基于复杂噪声（4-30）式所表示的模型滤波过程叙述如下，具体推导参见本章附录。

①初始化状态变量及其均方差

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = E[\mathbf{x}_0], \quad \mathbf{P}_0 = E[(\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)(\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)^T] \quad (4-38)$$

②时间更新

$$\begin{cases} \chi_{k-1} = [\hat{\mathbf{x}}_{k-1} \quad [\hat{\mathbf{x}}_{k-1}]_L + \gamma\sqrt{\mathbf{P}_{k-1}} \quad [\hat{\mathbf{x}}_{k-1}]_L - \gamma\sqrt{\mathbf{P}_{k-1}}] \\ \chi_{i,k|k-1}^* = \mathbf{f}(\chi_{i,k-1}) \\ \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} \chi_{i,k|k-1}^* \\ \mathbf{P}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} (\chi_{i,k|k-1}^* - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(\chi_{i,k|k-1}^* - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T + \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T \\ \chi_{k|k-1} = [\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \quad [\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}]_L + \gamma\sqrt{\mathbf{P}_{k|k-1}} \quad [\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}]_L - \gamma\sqrt{\mathbf{P}_{k|k-1}}] \\ \eta_{i,k|k-1} = \mathbf{h}(\chi_{i,k|k-1}) \\ \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} \eta_{i,k|k-1} \end{cases} \quad (4-39)$$

③量测更新

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{z}}_k \hat{\mathbf{z}}_k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} (\eta_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})(\eta_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})^T + \mathbf{j}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \mathbf{R}_k \mathbf{j}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T \\ \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{z}}_k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} (\chi_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(\eta_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})^T \\ \mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{z}}_k} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{z}}_k \hat{\mathbf{z}}_k}^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}) \\ \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{z}}_k \hat{\mathbf{z}}_k} \mathbf{K}_k^T \end{cases} \quad (4-40)$$

其中 $[\mathbf{x}_k]_L$ 表示每一个列向量均为 $\mathbf{x}_k$ 的一个含 L 列的矩阵，其它参数计算如下

$$\begin{cases} \lambda = \alpha^2(L + \kappa) - L \\ \gamma = \sqrt{L + \lambda} \\ W_0^{(m)} = \lambda / (L + \lambda), \quad W_0^{(c)} = \lambda / (L + \lambda) + (1 - \alpha^2 + \beta) \\ W_i^{(m)} = W_i^{(c)} = 1 / [2(L + \lambda)] \quad (i = 1, \dots, 2L) \end{cases} \quad (4-41)$$

式中 L 是状态 $\mathbf{x}_k$ 的维数, α 用于确定 Sigma 点在其均值附近的分布情况 (往往取为一个小的正值, 如 $1e-4 \leq \alpha \leq 1$), κ 是一比例因子 (一般在状态估计时设为 0, 在参数估计时取为 $3-L$), β 是另一个比例因子 (用于合并状态分布的先验知识, 对于高斯分布其最优值为 2), $\sqrt{\mathbf{P}}$ 表示矩阵 $\mathbf{P}$ 的平方根矩阵 (如满足矩阵方程 $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{P}$ 的下三角 Cholesky 分解矩阵 $\mathbf{A}$)。

进一步的, 如果模型 (4-30) 式中测量方程为线性, 即若 (4-30) 式可简化为

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k-1})\mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (4-42)$$

则可再对 UKF 滤波算法进行简化, 以下给出简化的简要说明及结果。在 (4-39) 式中 Sigma 采样点 $\chi_{k|k-1}$ 满足方程

$$\sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} (\chi_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(\chi_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T = \mathbf{P}_{k|k-1} \quad (4-43)$$

当系统的测量方程为线性方程 $\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$ 时, 从 (4-39) 式可得 $\eta_{i,k|k-1} = \mathbf{H}_k \chi_{i,k|k-1}$

和 $\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \mathbf{H}_k \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} \chi_{i,k|k-1} = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$, 因此有

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} (\eta_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})(\eta_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})^T \\ &= \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} [\mathbf{H}_k (\chi_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})][\mathbf{H}_k (\chi_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})]^T = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \end{aligned} \quad (4-44)$$

将 (4-44) 式代入 (4-40) 式中 $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{z}}_k \hat{\mathbf{z}}_k}$, 并注意到 $\mathbf{j}(\bullet)$ 是单位矩阵, 得

$$\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{z}}_k \hat{\mathbf{z}}_k} = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \quad (4-45)$$

同理可将 $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{z}}_k}$ 式等价

$$\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{z}}_k} = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \quad (4-46)$$

至此, 当过程噪声为复杂加性噪声并且测量方程是线性时, 推得简化 UKF 滤波算法如下

$$\begin{cases}
\chi_{k-1} = [\hat{\chi}_{k-1} \quad [\hat{\chi}_{k-1}]_L + \gamma\sqrt{P_{k-1}} \quad [\hat{\chi}_{k-1}]_L - \gamma\sqrt{P_{k-1}}] \\
\chi_{i,k|k-1}^* = f(\chi_{i,k-1}) \\
\hat{\chi}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} \chi_{i,k|k-1}^* \\
P_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} (\chi_{i,k|k-1}^* - \hat{\chi}_{k|k-1})(\chi_{i,k|k-1}^* - \hat{\chi}_{k|k-1})^T + g(\hat{\chi}_{k-1}) Q_{k-1} g(\hat{\chi}_{k-1})^T \quad (4-47) \\
P_{\hat{\chi}_k \hat{z}_k} = P_{k|k-1} H_k^T, \quad P_{\hat{z}_k \hat{z}_k} = H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k \\
K_k = P_{\hat{\chi}_k \hat{z}_k} P_{\hat{z}_k \hat{z}_k}^{-1} \\
\hat{z}_{k|k-1} = H_k \hat{\chi}_{k|k-1}, \quad \hat{\chi}_k = \hat{\chi}_{k|k-1} + K_k (z_k - \hat{z}_{k|k-1}) \\
P_k = P_{k|k-1} - K_k P_{\hat{z}_k \hat{z}_k} K_k^T
\end{cases}$$

可见,除使用 UT 变换进行状态及其方差预测外,其它算法步骤与标准 Kalman 滤波公式 (4-37) 式完全相同。简化 UKF 滤波算法 (4-47) 式避免了重采样、多次求解量测预测方程、计算量测预测方差等一系列繁杂过程。值得指出的是,文中分析 UKF 滤波简化过程采用的采样策略是对称 Sigma 采样,当然这一分析过程也适用于单形采样,后一采样策略还能进一步缩减滤波计算量。

4.5 大失准角下准静基座初始对准仿真

4.5.1 初始对准滤波模型

在准静基座条件下,从 (4-17) 和 (4-19) 式出发并参考阻尼 SINS 误差模型 (4-26a) 和 (4-26b) 式,假设陀螺测量误差 $\delta\omega_{ib}^b$ 主要为常值漂移误差 ε^b 和零均值高斯白噪声 w_g^b 、加速度计测量误差 δf_{sf}^b 主要为常值偏置误差 ∇^b 和零均值高斯白噪声 w_a^b ,忽略重力误差项 δg^n ,则初始对准滤波模型的状态方程可由以下四个矢量方程组成

$$\begin{cases}
\dot{\alpha} = C_{\omega}^{-1} [(I - C_n^{n'}) \omega_{in}^n - C_b^{n'} \varepsilon^b] + C_{\omega}^{-1} C_b^{n'} w_g^b \\
\delta \dot{v}^n = [I - (C_n^{n'})^T] C_b^{n'} \tilde{f}_{sf}^b + (C_n^{n'})^T C_b^{n'} \nabla^b + (C_n^{n'})^T C_b^{n'} w_a^b \\
\dot{\varepsilon}^b = 0 \\
\dot{\nabla}^b = 0
\end{cases} \quad (4-48)$$

容易看出 (4-48) 式中含欧拉平台误差角的三角函数与噪声之间乘积项,理论上这两式不属于简单加性噪声的误差模型 (4-29) 式,但是它们关于噪声项是线性的,因此必须使用上一小节提出的复杂加性噪声模型 UKF 进行滤波。显然,欲求得 (4-48) 式中前两个矢量方程的具体展开式是比较复杂的,求取它们的 (雅可比) Jacobian 矩阵就更加困难了,但是这并不妨碍在初始对准中应用 UKF 滤波算法。

令状态向量 $\mathbf{x} = [\boldsymbol{\alpha}^T \ (\delta \mathbf{v}^n)^T \ (\boldsymbol{\varepsilon}^b)^T \ (\nabla^b)^T]^T$ 、噪声向量 $\mathbf{w} = [(\mathbf{w}_g^b)^T \ (\mathbf{w}_a^b)^T \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}]^T$ ，建立滤波状态模型，并直接以阻尼 SINS 的速度（即准静基座的速度误差 $\mathbf{z} = \delta \mathbf{v}^n$ ）作为观测量建立观测方程如下

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{w} \\ \mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v} \end{cases} \quad (4-49)$$

$\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ 的具体表达式参考（4-48）式， $\mathbf{H} = [\mathbf{0} \ \mathbf{I} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}]$ ， $\mathbf{v}$ 为速度测量噪声。

4.5.2 初始对准仿真

仿真时，初始失准角 $\boldsymbol{\alpha}(0)$ 选择了三种比较典型的情形，它们分别是：1) $\boldsymbol{\alpha}(0) = [30 \ 10 \ 170]^T$ °、2) $\boldsymbol{\alpha}(0) = [0.3 \ 0.1 \ 170]^T$ ° 和 3) $\boldsymbol{\alpha}(0) = [0.3 \ 0.1 \ 1.7]^T$ °；再利用三种滤波方法进行失准角估计仿真，它们分别是：a) 大失准角 UKF 滤波、b) 大方位失准角 UKF 滤波、c) 小失准角标准 Kalman 滤波。仿真过程中不进行反馈修正，对准误差的仿真结果如图 4-4~图 4-5 所示，其中实线、虚线、点划线分别是滤波方法 a)、b) 和 c) 下的失准角估计误差，但是情形 1) 中方法 b) 和 c) 估计无效、情形 2) 中方法 c) 估计无效，图中未给出这三种曲线。这些典型的仿真结果说明了：利用大失准误差模型的 UKF 滤波方法对各种失准角下的初始对准估计有效，大方位失准角误差模型的 UKF 滤波只适用于水平失准角较小的情形，而标准 Kalman 滤波中要求三个失准角都比较小。从 4-4~图 4-5 还可以看出，初始失准角越大，滤波收敛时间越长，并且一般还存在滤波收敛精度越差的现象，因此，对准前装订比较准确的初始姿态角，或者对准过程中采用反馈修正方法不断减小失准角误差，对初始对准都是有益的。

此外，通过更多的仿真，作者总结出以下几点经验和措施，可以考虑用来在大失准角条件下提高初始对准性能：

①通常水平失准角估计速度比较快，而方位失准角慢，采用遗忘滤波算法有利于避免状态估计方差阵和增益矩阵的退化，提高方位收敛速度；

②滤波过程中当失准角降低至比较小时，从大失准角 UKF 滤波方式转到小失准角 Kalman 滤波方式能够降低计算量，并且不损失对准精度；

③对于一般非线性系统，目前还很难从理论上证明 UKF 滤波的有效性和收敛性，而主要依靠仿真和试验验证，如果在大失准角条件下使用 UKF 滤波的主要目的在于迅速辨识粗略失准角的话，则在 UKF 滤波模型中就可以不将惯性传感器误差纳入滤波模型，降低维数不仅能够减小计算量，还有利于减小 UKF 滤波发散

的机会。

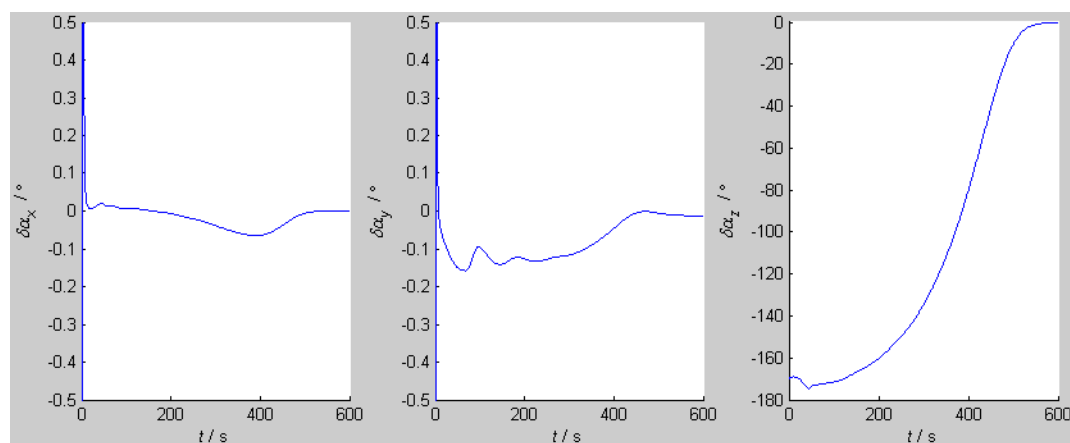


图 4-4 大失准角对准误差 ($\alpha(0) = [30 \ 10 \ 170]^T$ °)

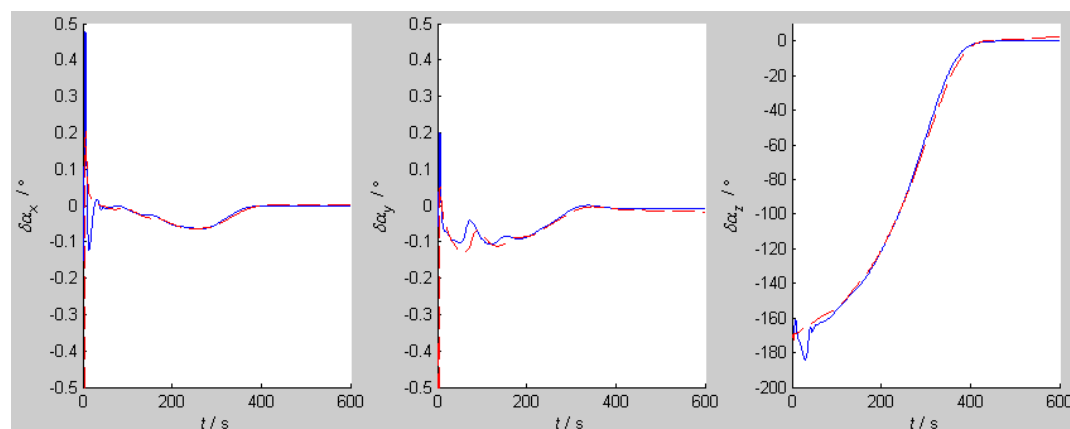


图 4-5 大方位失准角对准误差 ($\alpha(0) = [0.3 \ 0.1 \ 170]^T$ °)

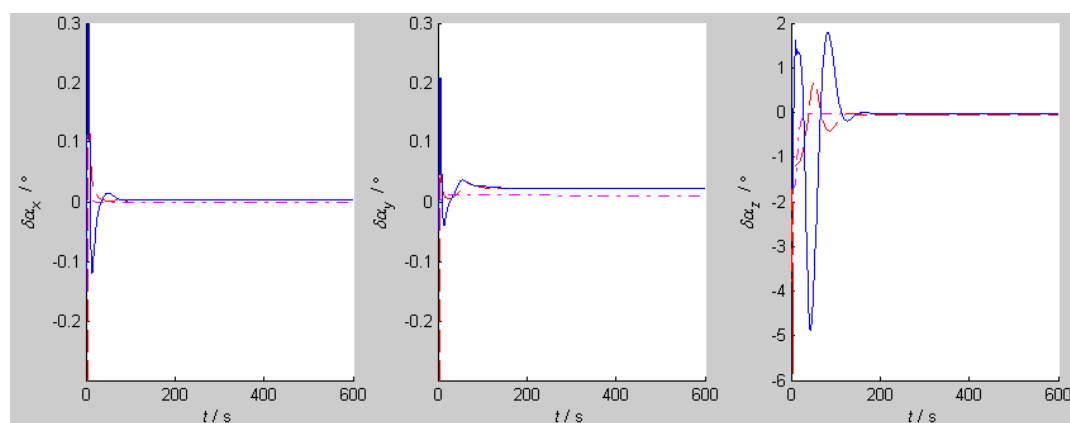


图 4-6 小失准角对准误差 ($\alpha(0) = [0.3 \ 0.1 \ 1.7]^T$ °)

4.6 本章小结

本章基于欧拉平台误差角方法表示理论导航坐标系与计算导航坐标系之间的失准角，推导了 SINS 非线性误差模型，大欧拉平台误差角下的仿真结果表明所提误差模型能准确地反映 SINS 误差特性。在系统噪声和量测噪声均为复杂加性噪声并且量测方程为线性时，推导了简化的 UKF 滤波方法，静基座下的初始对准仿真结果表明所提 SINS 误差模型和 UKF 滤波估计算法是正确和有效的。为了减小计算量和保证 UKF 稳定性，建议在大失准条件下可不必将惯性传感器误差纳入滤波模型，UKF 滤波的主要目的是为了降低失准角误差，当通过反馈修正使失准角比较小后，采用经典 Kalman 滤波更加有效。

附录：基于复杂加性噪声的简化 UKF 滤波

考虑复杂加性噪声非线性系统滤波模型

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k-1})\mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{j}(\mathbf{x}_k)\mathbf{v}_k \end{cases} \quad (\text{A1})$$

其中 $\mathbf{f}(\bullet)$ 、 $\mathbf{g}(\bullet)$ 、 $\mathbf{h}(\bullet)$ 、 $\mathbf{j}(\bullet)$ 均可为非线性函数， $\mathbf{x}_k$ 和 $\mathbf{z}_k$ 分别是 L^x 维状态向量和 L^z 维量测向量， $\mathbf{w}_k$ 和 $\mathbf{v}_k$ 分别是 L^w 维和 L^v 维零均值噪声向量，且记 $L^a = L^x + L^w$ 和 $L^b = L^x + L^v$ 。

设矩阵平方根分解 $\mathbf{P} = \sqrt{\mathbf{P}}\sqrt{\mathbf{P}}^T$ 、 $\mathbf{Q} = \sqrt{\mathbf{Q}}\sqrt{\mathbf{Q}}^T$ ，则在矩阵运算中容易验证下式成立

$$\mathbf{P}^a = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{P}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sqrt{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{P}}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sqrt{\mathbf{Q}}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{P}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sqrt{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{P}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sqrt{\mathbf{Q}} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A2})$$

因此有

$$\sqrt{\mathbf{P}^a} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{P}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sqrt{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} \quad (\text{A3})$$

UKF 滤波采用与标准 Kalman 滤波一样的“预测—修正”算法框架，在 UKF 预测过程中包含利用 UT 变换进行状态预测和量测预测两个预测过程，本附录主要介绍复杂加性噪声非线性系统滤波的这两个过程的简化算法公式。

首先, 介绍采用 UT 变换对 (A1) 中状态方程进行状态预测。将状态噪声增广为状态向量, 令增广状态 $\mathbf{x}_k^a$ 及其方差阵 $\mathbf{P}_k^a$ 分别为

$$\mathbf{x}_k^a = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{w}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_k^a = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_k \end{bmatrix} \quad (\text{A4})$$

根据 $k-1$ 时刻状态估计值 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ 、状态噪声 $\mathbf{w}_{k-1}$ 及它们方差阵设计 $2L^a+1$ 个 Sigma 对称采样点

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}_{k-1}^a &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} & [\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^a]_{L^a} + \gamma^a \sqrt{\mathbf{P}_{k-1}^a} & [\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^a]_{L^a} - \gamma^a \sqrt{\mathbf{P}_{k-1}^a} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} & [\hat{\mathbf{x}}_{k-1}]_{L^x} + \gamma^a \sqrt{\mathbf{P}_{k-1}} & [\hat{\mathbf{x}}_{k-1}]_{L^w} & [\hat{\mathbf{x}}_{k-1}]_{L^x} - \gamma^a \sqrt{\mathbf{P}_{k-1}} & [\hat{\mathbf{x}}_{k-1}]_{L^w} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma^a \sqrt{\mathbf{Q}_{k-1}} & \mathbf{0} & -\gamma^a \sqrt{\mathbf{Q}_{k-1}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

其中 $\gamma^a = \sqrt{L^a + \lambda^a}$, $[\mathbf{x}_k]_L$ 表示每一个列向量均为 $\mathbf{x}_k$ 的一个含 L 列的矩阵, 若不考虑列向量的排列顺序, 则有

$$\boldsymbol{\chi}_{k-1}^a = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} & [\hat{\mathbf{x}}_{k-1}]_{L^x} + \gamma^a \sqrt{\mathbf{P}_{k-1}} & [\hat{\mathbf{x}}_{k-1}]_{L^x} - \gamma^a \sqrt{\mathbf{P}_{k-1}} & [\hat{\mathbf{x}}_{k-1}]_{L^w} & [\hat{\mathbf{x}}_{k-1}]_{L^w} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma^a \sqrt{\mathbf{Q}_{k-1}} & -\gamma^a \sqrt{\mathbf{Q}_{k-1}} \end{bmatrix} \quad (\text{A6})$$

记 $\boldsymbol{\chi}_{k-1}^x$ 、 $\boldsymbol{\chi}_{k-1}^w$ 分别是 $\boldsymbol{\chi}_{k-1}^a$ 中从 1 到 L^x 行、从 L^x+1 到 L^a 行的分块矩阵, 即

$$\boldsymbol{\chi}_{k-1}^a = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\chi}_{k-1}^x \\ \boldsymbol{\chi}_{k-1}^w \end{bmatrix}.$$

将 Sigma 采样点 (A6) 式代入模型 (A1) 式中的状态方程计算一步预测

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^{*x} &= \mathbf{f}(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^x) + \mathbf{g}(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^x) \boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^w \\ &= \begin{cases} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}), & i = 0 \\ \mathbf{f}(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^x), & i = 1 \dots 2L^x \\ \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^w, & i = 2L^x + 1 \dots 2L^a \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

由 $\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^{*x}$ 求状态一步预测的均值 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ 为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} &= \sum_{i=0}^{2L^a} W_i^{a(m)} \boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^{*x} \\ &= \frac{\lambda^a}{L^a + \lambda^a} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \frac{1}{2(L^a + \lambda^a)} \left\{ \sum_{i=1}^{2L^x} \mathbf{f}(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^x) + \sum_{i=2L^x+1}^{2L^a} [\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^w] \right\} \\ &= \frac{\lambda^a + L^w}{L^a + \lambda^a} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \frac{1}{2(L^a + \lambda^a)} \sum_{i=1}^{2L^x} \mathbf{f}(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^x) \\ &= \frac{\lambda^x}{L^x + \lambda^x} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \frac{1}{2(L^x + \lambda^x)} \sum_{i=1}^{2L^x} \mathbf{f}(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^x) = \sum_{i=0}^{2L^x} W_i^{x(m)} \boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^{*x} \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

其中假设 $L^w + \lambda^a = \lambda^x$, 易知 $L^a + \lambda^a = L^x + \lambda^x$, $W_i^{a(m)}$ 是根据 L^a 和 λ^a 计算的均值比

例系数，而 $W_i^{x(m)}$ 是根据 L^x 和 λ^x 计算的均值比例系数。再由一步预测 $\chi_{i,k|k-1}^x$ 及其均值计算一步预测均方差阵 $P_{k|k-1}$ 为

$$\begin{aligned}
P_{k|k-1} &= \sum_{i=0}^{2L^a} W_i^{a(c)} (\chi_{i,k|k-1}^{*x} - \hat{x}_{k|k-1})(\chi_{i,k|k-1}^{*x} - \hat{x}_{k|k-1})^T \\
&= \left[\frac{\lambda^a}{L^a + \lambda^a} + (1 - \alpha^2 + \beta) \right] [f(\hat{x}_{k-1}) - \hat{x}_{k|k-1}][f(\hat{x}_{k-1}) - \hat{x}_{k|k-1}]^T \\
&\quad + \frac{1}{2(L^a + \lambda^a)} \left\{ \sum_{i=1}^{2L^x} [f(\chi_{i,k-1}^x) - \hat{x}_{k|k-1}][f(\chi_{i,k-1}^x) - \hat{x}_{k|k-1}]^T \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=2L^x+1}^{2L^a} [f(\hat{x}_{k-1}) + g(\hat{x}_{k-1})\chi_{i,k-1}^w - \hat{x}_{k|k-1}][f(\hat{x}_{k-1}) + g(\hat{x}_{k-1})\chi_{i,k-1}^w - \hat{x}_{k|k-1}]^T \right\} \\
&= \left[\frac{\lambda^a}{L^a + \lambda^a} + (1 - \alpha^2 + \beta) \right] [f(\hat{x}_{k-1}) - \hat{x}_{k|k-1}][f(\hat{x}_{k-1}) - \hat{x}_{k|k-1}]^T \\
&\quad + \frac{1}{2(L^a + \lambda^a)} \left\{ \sum_{i=1}^{2L^x} [f(\chi_{i,k-1}^x) - \hat{x}_{k|k-1}][f(\chi_{i,k-1}^x) - \hat{x}_{k|k-1}]^T \right. \\
&\quad + \sum_{i=2L^x+1}^{2L^a} \left\{ [f(\hat{x}_{k-1}) - \hat{x}_{k|k-1}][f(\hat{x}_{k-1}) - \hat{x}_{k|k-1}]^T + [f(\hat{x}_{k-1}) - \hat{x}_{k|k-1}]\chi_{i,k-1}^{wT} g(\hat{x}_{k-1})^T \right. \\
&\quad \left. \left. + g(\hat{x}_{k-1})\chi_{i,k-1}^w [f(\hat{x}_{k-1}) - \hat{x}_{k|k-1}]^T + g(\hat{x}_{k-1})\chi_{i,k-1}^w \chi_{i,k-1}^{wT} g(\hat{x}_{k-1})^T \right\} \right\} \\
&= \left[\frac{\lambda^a + L^w}{L^a + \lambda^a} + (1 - \alpha^2 + \beta) \right] [f(\hat{x}_{k-1}) - \hat{x}_{k|k-1}][f(\hat{x}_{k-1}) - \hat{x}_{k|k-1}]^T \\
&\quad + \frac{1}{2(L^a + \lambda^a)} \left\{ \sum_{i=1}^{2L^x} [f(\chi_{i,k-1}^x) - \hat{x}_{k|k-1}][f(\chi_{i,k-1}^x) - \hat{x}_{k|k-1}]^T \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=2L^x+1}^{2L^a} g(\hat{x}_{k-1})\chi_{i,k-1}^w \chi_{i,k-1}^{wT} g(\hat{x}_{k-1})^T \right\} \\
&= \left[\frac{\lambda^x}{L^x + \lambda^x} + (1 - \alpha^2 + \beta) \right] [f(\hat{x}_{k-1}) - \hat{x}_{k|k-1}][f(\hat{x}_{k-1}) - \hat{x}_{k|k-1}]^T \\
&\quad + \frac{1}{2(L^x + \lambda^x)} \sum_{i=1}^{2L^x} [f(\chi_{i,k-1}^x) - \hat{x}_{k|k-1}][f(\chi_{i,k-1}^x) - \hat{x}_{k|k-1}]^T \\
&\quad + \frac{2(\gamma^a)^2}{2(L^a + \lambda^a)} g(\hat{x}_{k-1})Q_{k-1}g(\hat{x}_{k-1})^T \\
&= \sum_{i=0}^{2L^x} W_i^{x(c)} (\chi_{i,k|k-1}^{*x} - \hat{x}_{k|k-1})(\chi_{i,k|k-1}^{*x} - \hat{x}_{k|k-1})^T + g(\hat{x}_{k-1})Q_{k-1}g(\hat{x}_{k-1})^T \quad (A9)
\end{aligned}$$

其中 $W_i^{a(c)}$ 是根据 L^a 和 λ^a 计算的方差比例系数， $W_i^{x(c)}$ 是根据 L^x 和 λ^x 计算的方差比例系数。

接下来，再采用 UT 变换对 (A1) 中测量方程进行量测预测，将量测噪声增广状态变量，令增广状态 $\mathbf{x}_k^b$ 及其方差 P_k^b 分别为

$$\mathbf{x}_k^b = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{v}_k \end{bmatrix}, \quad P_k^b = \begin{bmatrix} P_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R_k \end{bmatrix} \quad (A10)$$

参考 (A6) 式, 根据 $k-1$ 时刻状态预测均值 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ 、量测噪声 $\mathbf{v}_k$ 及方差阵 $\mathbf{P}_{k|k-1}$ 、 $\mathbf{R}_k$ 重新设计 $2L^b+1$ 个 Sigma 采样点 (重采样) 如下

$$\boldsymbol{\chi}_{k|k-1}^b = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} & [\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}]_{L^x} + \gamma^b \sqrt{\mathbf{P}_{k|k-1}} & [\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}]_{L^x} - \gamma^b \sqrt{\mathbf{P}_{k|k-1}} & [\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}]_{L^v} & [\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}]_{L^v} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma^b \sqrt{\mathbf{R}_k} & -\gamma^b \sqrt{\mathbf{R}_k} \end{bmatrix} \quad (\text{A11})$$

其中 $\gamma^b = \sqrt{L^b + \lambda^b}$, 记 $\boldsymbol{\chi}_{k|k-1}^x$ 、 $\boldsymbol{\chi}_k^v$ 分别是 $\boldsymbol{\chi}_{k|k-1}^b$ 中从 1 到 L^x 行、从 L^x+1 到 L^b 行的

分块矩阵, 即 $\boldsymbol{\chi}_{k|k-1}^b = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\chi}_{k|k-1}^x \\ \boldsymbol{\chi}_k^v \end{bmatrix}$ 。

由 (A1) 式中测量模型计算 Sigma 采样点的量测一步预测

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1} &= \mathbf{h}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^x) + \mathbf{j}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^x) \cdot \boldsymbol{\chi}_{i,k}^v \\ &= \begin{cases} \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}), & i = 0 \\ \mathbf{h}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^x), & i = 1 \dots 2L^x \\ \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \mathbf{j}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \boldsymbol{\chi}_{i,k}^v, & i = 2L^x + 1 \dots 2L^b \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

求量测一步预测均值 $\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}$ 为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} &= \sum_{i=0}^{2L^b} W_i^{b(m)} \boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1} \\ &= \frac{\lambda^b}{L^b + \lambda^b} \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \\ &\quad + \frac{1}{2(L^b + \lambda^b)} \left\{ \sum_{i=1}^{2L^x} \mathbf{h}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^x) + \sum_{i=2L^x+1}^{2L^b} [\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \mathbf{j}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \boldsymbol{\chi}_{i,k}^v] \right\} \quad (\text{A13}) \\ &= \frac{\lambda^b + L^v}{L^b + \lambda^b} \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \frac{1}{2(L^b + \lambda^b)} \sum_{i=1}^{2L^x} \mathbf{h}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^x) \\ &= \frac{\lambda^x}{L^x + \lambda^x} \mathbf{h}(\boldsymbol{\chi}_{0,k|k-1}^x) + \frac{1}{2(L^x + \lambda^x)} \sum_{i=1}^{2L^x} \mathbf{h}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^x) = \sum_{i=0}^{2L^x} W_i^{x(m)} \boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1} \end{aligned}$$

其中假设 $L^v + \lambda^b = \lambda^x$, 并易知 $L^b + \lambda^b = L^x + \lambda^x$ 。再求量测一步预测方差阵 $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{z}}_k \hat{\mathbf{z}}_k}$ 和

状态预测与量测预测之间协方差阵 $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{z}}_k}$ 为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{z}}_k \hat{\mathbf{z}}_k} &= \sum_{i=0}^{2L^b} W_i^{b(c)} (\boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})(\boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})^T \\ &= \left[\frac{\lambda^b}{L^b + \lambda^b} + (1 - \alpha^2 + \beta) \right] [\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}][\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}]^T \\ &\quad + \frac{1}{2(L^b + \lambda^b)} \left\{ \sum_{i=1}^{2L^x} [\mathbf{h}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^x) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}][\mathbf{h}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^x) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}]^T \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=2L^x+1}^{2L^b} [\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \mathbf{j}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \boldsymbol{\chi}_{i,k}^v - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}][\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \mathbf{j}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \boldsymbol{\chi}_{i,k}^v - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}]^T \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{\lambda^b}{L^b + \lambda^b} + (1 - \alpha^2 + \beta) \right] \left[\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \right] \left[\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \right]^T \\
&\quad + \frac{1}{2(L^b + \lambda^b)} \left\{ \sum_{i=1}^{2L^x} \left[\mathbf{h}(\chi_{i,k|k-1}^x) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \right] \left[\mathbf{h}(\chi_{i,k|k-1}^x) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \right]^T \right. \\
&\quad + \sum_{i=2L^x+1}^{2L^b} \left\{ \left[\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \right] \left[\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \right]^T + \left[\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \right] \chi_{i,k}^v{}^T \mathbf{j}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T \\
&\quad \left. + \mathbf{j}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \chi_{i,k}^v \left[\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \right]^T + \mathbf{j}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \chi_{i,k}^v \chi_{i,k}^v{}^T \mathbf{j}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T \right\} \Big\} \\
&= \left[\frac{\lambda^b + L^v}{L^b + \lambda^b} + (1 - \alpha^2 + \beta) \right] \left[\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \right] \left[\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \right]^T \\
&\quad + \frac{1}{2(L^b + \lambda^b)} \left\{ \sum_{i=1}^{2L^x} \left[\mathbf{h}(\chi_{i,k|k-1}^x) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \right] \left[\mathbf{h}(\chi_{i,k|k-1}^x) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \right]^T \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{j}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \chi_{i,k}^v \chi_{i,k}^v{}^T \mathbf{j}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T \right\} \\
&= \left[\frac{\lambda^x}{L^x + \lambda^x} + (1 - \alpha^2 + \beta) \right] \left[\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \right] \left[\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \right]^T \\
&\quad + \frac{1}{2(L^x + \lambda^x)} \sum_{i=1}^{2L^x} \left[\mathbf{h}(\chi_{i,k|k-1}^x) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \right] \left[\mathbf{h}(\chi_{i,k|k-1}^x) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \right]^T \\
&\quad + \frac{2(\gamma^b)^2}{2(L^b + \lambda^b)} \mathbf{j}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \chi_{i,k}^v \chi_{i,k}^v{}^T \mathbf{j}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T \\
&= \sum_{i=0}^{2L^x} W_i^{x(c)} (\boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}) (\boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})^T + \mathbf{j}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \mathbf{R}_k \mathbf{j}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T \tag{A14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{z}}_k} &= \sum_{i=0}^{2L^b} W_i^{b(c)} (\chi_{i,k|k-1}^x - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) (\boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})^T \\
&= \left[\frac{\lambda^b}{L^b + \lambda^b} + (1 - \alpha^2 + \beta) \right] \left[\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right] \left[\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \right]^T \\
&\quad + \frac{1}{2(L^b + \lambda^b)} \left\{ \sum_{i=1}^{2L^x} \left[\chi_{i,k|k-1}^x - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right] \left[\mathbf{h}(\chi_{i,k|k-1}^x) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \right]^T \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=2L^x+1}^{2L^b} \left[\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right] \left[\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \mathbf{j}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \chi_{i,k}^v - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \right]^T \right\} \\
&= \left[\frac{\lambda^b + L^v}{L^b + \lambda^b} + (1 - \alpha^2 + \beta) \right] \left[\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right] \left[\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \right]^T \\
&\quad + \frac{1}{2(L^b + \lambda^b)} \sum_{i=1}^{2L^x} \left[\chi_{i,k|k-1}^x - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right] \left[\mathbf{h}(\chi_{i,k|k-1}^x) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \right]^T \\
&= \sum_{i=0}^{2L^x} W_i^{x(c)} (\chi_{i,k|k-1}^x - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) (\boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})^T \tag{A15}
\end{aligned}$$

至此，总结前面的状态预测与量测预测计算公式，减少 Sigma 采样点个数，即分别以 χ_{k-1}^x 、 $\chi_{k|k-1}^x$ 代替 χ_{k-1}^a 和 $\chi_{k|k-1}^b$ ，重写基于复杂加性噪声非线性系统滤波模型的 UKF 状态预测和量测预测过程如下：

$$\begin{cases}
\chi_{k-1}^x = [\hat{x}_{k-1} \quad \hat{x}_{k-1}] + \gamma^x \sqrt{P_{k-1}} \quad [\hat{x}_{k-1}] - \gamma^x \sqrt{P_{k-1}} \\
\chi_{i,k|k-1}^{*x} = f(\chi_{i,k-1}^x), \quad i = 0 \dots 2L^x \\
\hat{x}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L^x} W_i^{x(m)} \chi_{i,k|k-1}^{*x} \\
P_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L^x} W_i^{x(c)} (\chi_{i,k|k-1}^{*x} - \hat{x}_{k|k-1})(\chi_{i,k|k-1}^{*x} - \hat{x}_{k|k-1})^T + g(\hat{x}_{k-1}) Q_{k-1} g(\hat{x}_{k-1})^T
\end{cases} \quad (A16)$$

$$\begin{cases}
\chi_{k|k-1}^x = [\hat{x}_{k|k-1} \quad \hat{x}_{k|k-1}] + \gamma^x \sqrt{P_{k|k-1}} \quad [\hat{x}_{k|k-1}] - \gamma^x \sqrt{P_{k|k-1}} \\
\eta_{i,k|k-1} = h(\chi_{i,k|k-1}^x), \quad i = 0 \dots 2L^x \\
\hat{z}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L^x} W_i^{x(m)} \eta_{i,k|k-1} \\
P_{\hat{z}_k \hat{z}_k} = \sum_{i=0}^{2L^x} W_i^{x(c)} (\eta_{i,k|k-1} - \hat{z}_{k|k-1})(\eta_{i,k|k-1} - \hat{z}_{k|k-1})^T + j(\hat{x}_{k|k-1}) R_k j(\hat{x}_{k|k-1})^T \\
P_{\hat{x}_k \hat{z}_k} = \sum_{i=0}^{2L^x} W_i^{x(c)} (\chi_{i,k|k-1}^x - \hat{x}_{k|k-1})(\eta_{i,k|k-1} - \hat{z}_{k|k-1})^T
\end{cases} \quad (A17)$$

其中 $\gamma^x = \sqrt{L^x + \lambda^x}$ ，剩余的 UKF 修正过程与标准 Kalman 滤波相同，这里不再赘述。显然，当 w_k 、 v_k 分别是与 x_k 和 z_k 维数相同的噪声，并且 $g(\bullet)$ 和 $j(\bullet)$ 是常值单位矩阵时，容易看出上述滤波预测过程就与简单加性噪声的 UKF 滤波完全一致了。

第五章 SINS 内杆臂效应分析与补偿

5.1 引言

在许多捷联惯性导航问题的研究中,都将捷联惯性测量组件(SIMU)当作“点测量组件”看待,当选择运载体上某点作为导航参考点(如舰船的摇摆中心),或进行不同导航系统之间信息比对(如SINS/GPS组合导航)时,必须考虑杆臂效应问题,不妨称之为外杆臂效应^[36-39]。如果重新将导航参考点选择在SIMU上,并且假设惯性器件测量和导航计算均是理想无误差的,则外杆臂效应从原理上并不会造成惯性导航结果误差,即导航结果就是运载体在SIMU点处真实运动状态的反映。然而现实中SIMU毕竟是具有有一定体积大小的。如果将SIMU视为刚体,在SIMU角运动过程中它上面每个点的角速度都是相同的,所以理论上在SIMU中三个角速度测量传感器——陀螺的安装位置和方位可以是任意的,只要它们的敏感轴之间不相互平行,经过标定后均能实现SIMU的空间三维角速度测量^[40],但是,在角运动情况下,SIMU上各个点的加速度一般是互不相同的,也就是说,由于三个加速度计物理尺寸和实际安装位置的限制,使得它们测量的是SIMU上不同点处的加速度,如果把这些加速度当作来自于理想“点测量组件”的输出进行惯性导航解算,将从原理上引起导航误差,文中称这种误差为内杆臂效应误差(在有些文献中称之为尺寸效应-Dimension Effect)。本章研究的主要内容是分析内杆臂效应的产生原因和规律,并提出相应的补偿措施。

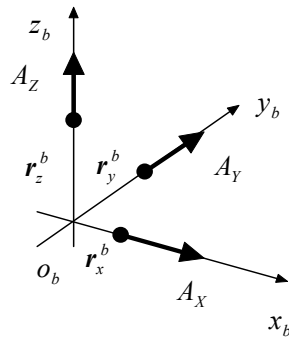


图5-1 三个加速度计的安裝位置和敏感方向

为了研究方便,提出如下假设条件:在SIMU中陀螺的测量是理想无误差的,SIMU中包含三个单轴加速度计 A_x 、 A_y 和 A_z ,它们是“点敏感”的并且敏感点

(也可以用 A_x 、 A_y 和 A_z 点表示) 相对SIMU固定不变, 加速度计只感测沿敏感轴向的加速度, 三个加速度计敏感轴相互垂直并且延长线相交于 o_b 点, 如图5-1所示, 以 o_b 为原点建立与SIMU固连的动坐标系 $o_b x_b y_b z_b$, 各加速度计敏感点相对于 o_b 的位置矢量在 $o_b x_b y_b z_b$ 上投影分别为 $\mathbf{r}_x^b = [r_x \ 0 \ 0]^T$ 、 $\mathbf{r}_y^b = [0 \ r_y \ 0]^T$ 和 $\mathbf{r}_z^b = [0 \ 0 \ r_z]^T$ 。

下面首先分析质点在二维平面上的运动情况。

5.2 质点在圆弧形轨道上的运动分析

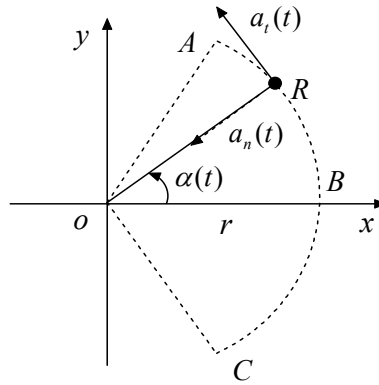


图 5-2 质点在圆弧形轨道上运动示意图

质点 R 沿半径为 r 的圆弧形轨道 ABC 反复运动, 以角运动对称轴 oB 为 ox 轴, 圆弧中心 o 为坐标原点建立固定坐标系 oxy , 使圆弧在平面 oxy 上, 如图 5-2 所示 (其中 oz 轴未画出, 它垂直纸面向外), 质点与圆心之间的连线为 oR , 假设 oR 与 ox 轴的夹角 $\alpha(t)$ 的规律为正弦角振动, 即

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega t) \quad (5-1)$$

其中 α_0 为振动幅值、 ω 为角频率, 并令 $T = 2\pi / \omega$ 为振动周期, 由 (5-1) 式求导后得振动角速率

$$\dot{\alpha}(t) = \alpha_0 \omega \cos(\omega t) \quad (5-2)$$

还容易得质点法向速度 $v_n(t)$ 、向心加速度 $a_n(t)$ 、切向速度 $v_t(t)$ 和切向加速度 $a_t(t)$ 分别为

$$\begin{cases} v_n(t) = 0 \\ a_n(t) = [\dot{\alpha}(t)]^2 r = r \alpha_0^2 \omega^2 [\cos(\omega t)]^2 \\ v_t(t) = \dot{\alpha}(t) r = r \alpha_0 \omega \cos(\omega t) \\ a_t(t) = [v_t(t)]' = -r \alpha_0 \omega^2 \sin(\omega t) \end{cases} \quad (5-3)$$

一方面, 在 (5-3) 式中对法向速度 $v_n(t)$ 和切向速度 $v_t(t)$ 沿坐标轴向分解, 得速度投影

$$\begin{cases} v_x(t) = -v_t(t) \sin[\alpha(t)] = -r\alpha_0\omega \cos(\omega t) \sin[\alpha_0 \sin(\omega t)] \\ v_y(t) = v_t(t) \cos[\alpha(t)] = r\alpha_0\omega \cos(\omega t) \cos[\alpha_0 \sin(\omega t)] \end{cases} \quad (5-4)$$

易知有 $v_x(0) = v_x(T) = 0$ 和 $v_y(0) = v_y(T) = r\alpha_0\omega$ 成立, 且在一个周期内速度变化 $\Delta v_x(T) = v_x(T) - v_x(0) = 0$, $\Delta v_y(T) = v_y(T) - v_y(0) = 0$, 将 (5-4) 式求导得沿坐标轴向的加速度

$$\begin{cases} a_x(t) = [v_x(t)]' \\ \quad = -r\alpha_0\omega^2 \{-\sin(\omega t) \sin[\alpha_0 \sin(\omega t)] + \alpha_0 [\cos(\omega t)]^2 \cos[\alpha_0 \sin(\omega t)]\} \\ a_y(t) = [v_y(t)]' \\ \quad = -r\alpha_0\omega^2 \{\sin(\omega t) \cos[\alpha_0 \sin(\omega t)] + \alpha_0 [\cos(\omega t)]^2 \sin[\alpha_0 \sin(\omega t)]\} \end{cases} \quad (5-5)$$

另一方面, 在 (5-3) 式中直接对切向加速度 $a_t(t)$ 和向心加速度 $a_n(t)$ 沿坐标轴向分解, 得加速度投影

$$\begin{cases} a_{tx}(t) = -a_t(t) \sin[\alpha(t)] = r\alpha_0\omega^2 \sin(\omega t) \sin[\alpha_0 \sin(\omega t)] \\ a_{ty}(t) = a_t(t) \cos[\alpha(t)] = -r\alpha_0\omega^2 \sin(\omega t) \cos[\alpha_0 \sin(\omega t)] \\ a_{nx}(t) = -a_n(t) \cos[\alpha(t)] = -r\alpha_0^2\omega^2 [\cos(\omega t)]^2 \cos[\alpha_0 \sin(\omega t)] \\ a_{ny}(t) = -a_n(t) \sin[\alpha(t)] = -r\alpha_0^2\omega^2 [\cos(\omega t)]^2 \sin[\alpha_0 \sin(\omega t)] \end{cases} \quad (5-6)$$

比较 (5-5) 式和 (5-6) 式, 易得

$$\begin{cases} a_x(t) = a_{tx}(t) + a_{nx}(t) \\ a_y(t) = a_{ty}(t) + a_{ny}(t) \end{cases} \quad (5-7)$$

暂且定义含参数 β 的二元积分函数

$$\begin{cases} Y_s(\beta, u, v) = \int_u^v \beta \sin(t) \sin[\beta \sin(t)] dt \\ Y_c(\beta, u, v) = \int_u^v \beta \sin(t) \cos[\beta \sin(t)] dt \end{cases} \quad (5-8)$$

直接求 (5-8) 式中两个积分的解析式解是非常困难的, 但是根据被积函数的周期和对称特性, 易知

$$\begin{cases} Y_s(\beta, 0, \pi/2) = Y_s(\beta, \pi/2, \pi) = Y_s(\beta, \pi, 3\pi/2) = Y_s(\beta, 3\pi/2, 2\pi) \\ Y_c(\beta, 0, 2\pi) = Y_c(\beta, \pi/2, 3\pi/2) = 0 \end{cases} \quad (5-9)$$

若将参数 β 作为变量, 当取值从 0 到 180° 变化时, 利用数值积分方法求得 $Y_s(\beta, 0, \pi/2)$ 的值, 如图 5-3 所示, 其中左上和右下小图分别为参数 β 从 0 到 0.18°

时和从0到1.8°时的积分函数曲线，由图可见，函数值随着参数 β 的减小而迅速减小。

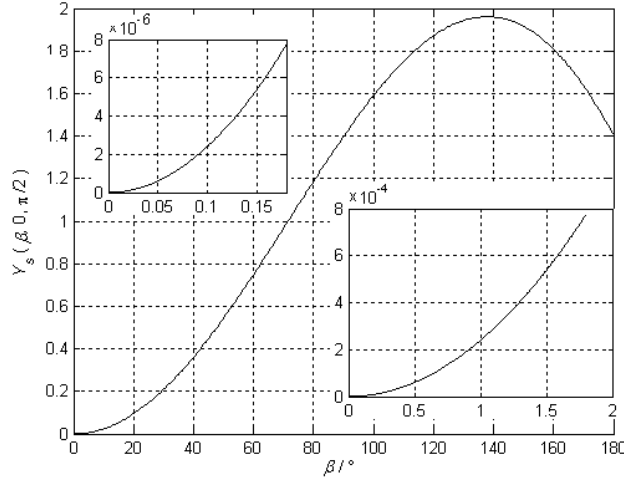


图5-3 $Y_s(\beta, 0, \pi/2)$ 函数值

至此，根据（5-6）式和（5-7）式，可求得沿坐标轴向的各加速度投影分量在一个周期内的积分为

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v_{tx}(T) = \int_0^T a_{tx}(t) dt \\ \quad = \int_0^T r \alpha_0 \omega^2 \sin(\omega t) \sin[\alpha_0 \sin(\omega t)] dt = 4r\omega Y_s(\alpha_0, 0, \pi/2) \\ \Delta v_{ty}(T) = \int_0^T a_{ty}(t) dt \\ \quad = \int_0^T -r \alpha_0 \omega^2 \sin(\omega t) \cos[\alpha_0 \sin(\omega t)] dt = -Y_c(\alpha_0, 0, 2\pi) = 0 \\ \Delta v_{nx}(T) = \int_0^T a_{nx}(t) dt \\ \quad = \int_0^T a_x(t) - a_{tx}(t) dt = \Delta v_x(T) - \int_0^T a_{tx}(t) dt = -4r\omega Y_s(\alpha_0, 0, \pi/2) \\ \Delta v_{ny}(T) = \int_0^T a_{ny}(t) dt \\ \quad = \int_0^T a_y(t) - a_{ty}(t) dt = \Delta v_y(T) - \int_0^T a_{ty}(t) dt = 0 \end{array} \right. \quad (5-10)$$

虽然（5-10）式中第一、三式显示向心加速度和切向加速度的 ox 轴投影在一个周期内积分均不为零，但是它们符号正好相反，而（5-10）式中第二、四式显示向心加速度和切向加速度的 oy 轴投影在一个周期内积分均为零。换句话说，在“点测量组件”中，若由加速度计分别测量质点的切向和法向加速度，并且由陀螺准确测量角振动，则理论上利用陀螺和加速度计测量进行导航积分解算，在一个周期内的总速度增量将为零。但是，如果SIMU不是“点测量组件”，情况又会如何呢？这一问题将在下一节中进行详细分析。

5.3 内杆臂效应误差分析

假设SIMU绕平行于 $o_b z_b$ 轴的某转动轴作正弦角振动, 该转动轴与 $o_b x_b y_b$ 平面相交于 o'_b 点, 振动幅值为 α_0 、频率为 ω , 如图5-4所示。现建立两种坐标系: 一是固定坐标系 $oxyz$, 使 ox 和 oy 坐标轴分别平行于振动平衡位置时的两加速度计敏感轴向, 原点可任意选取; 二是与SIMU固连的动坐标系 $o'_b x'_b y'_b z'_b$, 在平衡位置时它的三个坐标轴分别平行于 $o_b x_b y_b z_b$ 的同名坐标轴, 则参照(5-3)式可得角振动在 A_X 加速度计敏感点处的向心加速度和切向加速度大小分别为

$$\begin{cases} a_{Xn}(t) = |o'_b A_X| \alpha_0^2 \omega^2 [\cos(\omega t)]^2 \\ a_{Xt}(t) = -|o'_b A_X| \alpha_0 \omega^2 \sin(\omega t) \end{cases} \quad (5-11)$$

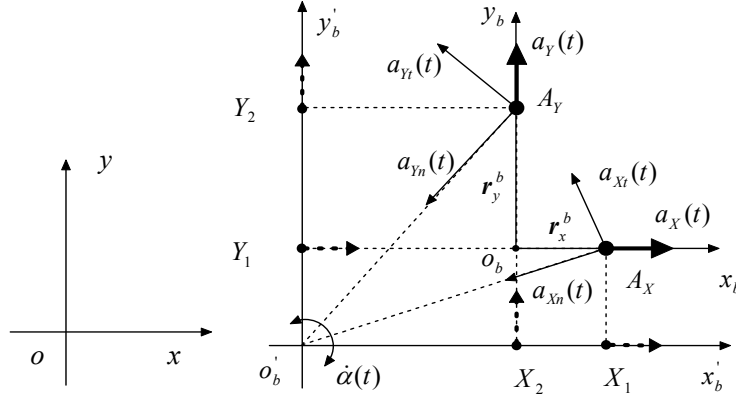


图5-4 内杆臂效应分析示意图

所以沿加速度计 A_X 敏感轴向的加速度, 即加速度计 A_X 的测量值为

$$\begin{aligned} a_X(t) &= -a_{Xn}(t) \cos \angle A_X o'_b x'_b - a_{Xt}(t) \sin \angle A_X o'_b x'_b \\ &= -|o'_b X_1| \alpha_0^2 \omega^2 [\cos(\omega t)]^2 + |o'_b Y_1| \alpha_0 \omega^2 \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (5-12)$$

它等效于在 X_1 和 Y_1 点处的两个虚拟的加速度计测量合成, X_1 测量的是振动虚拟法向加速度 $\tilde{a}_{Xn}(t) = -|o'_b X_1| \alpha_0^2 \omega^2 [\cos(\omega t)]^2$, Y_1 测量的是振动虚拟切向加速度 $\tilde{a}_{Xt}(t) = |o'_b Y_1| \alpha_0 \omega^2 \sin(\omega t)$ 。同理可得 A_Y 加速度计的测量值为

$$\begin{aligned} a_Y(t) &= -a_{Yn}(t) \sin \angle A_Y o'_b x'_b + a_{Yt}(t) \cos \angle A_Y o'_b x'_b \\ &= -|o'_b Y_2| \alpha_0^2 \omega^2 [\cos(\omega t)]^2 - |o'_b X_2| \alpha_0 \omega^2 \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (5-13)$$

并等效成在 Y_2 和 X_2 点处的两个虚拟的加速度计测量合成, Y_2 测量的是振动虚拟法向加速度 $\tilde{a}_{Yn}(t) = -|o'_b Y_2| \alpha_0^2 \omega^2 [\cos(\omega t)]^2$, X_2 测量的是振动虚拟切向加速度 $\tilde{a}_{Yt}(t) = -|o'_b X_2| \alpha_0 \omega^2 \sin(\omega t)$ 。

参考 (5-6) 式和 (5-10) 式, 将 $\tilde{a}_{x_n}(t)$ 、 $\tilde{a}_{x_l}(t)$ 、 $\tilde{a}_{y_n}(t)$ 和 $\tilde{a}_{y_l}(t)$ 均沿固定坐标系 $oxyz$ 的轴向投影, 再在一个振动周期内积分并求和, 得沿轴向导航速度增量

$$\begin{cases} \Delta v_x(T) = \int_0^T a_x(t) dt = \int_0^T [\tilde{a}_{x_{nx}}(t) + \tilde{a}_{x_{lx}}(t) + \tilde{a}_{y_{nx}}(t) + \tilde{a}_{y_{lx}}(t)] dt \\ \quad = -4|o'_b X_1| \omega Y_s(\alpha_0, 0, \pi/2) + 0 + 0 + 4|o'_b X_2| \omega Y_s(\alpha_0, 0, \pi/2) \\ \quad = -4r_x \omega Y_s(\alpha_0, 0, \pi/2) \\ \Delta v_y(T) = \int_0^T a_y(t) dt = \int_0^T [\tilde{a}_{x_{ny}}(t) + \tilde{a}_{x_{ly}}(t) + \tilde{a}_{y_{ny}}(t) + \tilde{a}_{y_{ly}}(t)] dt \\ \quad = 0 + 4|o'_b Y_1| \omega Y_s(\alpha_0, 0, \pi/2) - 4|o'_b Y_2| \omega Y_s(\alpha_0, 0, \pi/2) + 0 \\ \quad = -4r_y \omega Y_s(\alpha_0, 0, \pi/2) \end{cases} \quad (5-14)$$

由 (5-14) 式可见, 在一个振动周期内的导航速度增量与振动中心的位置无关, 由于 ox 轴 (或 oy 轴) 上的虚拟法向加速度积分与虚拟切向加速度积分无法完全抵消, 当振幅一定时, 导航速度增量与加速度计敏感点 (A_x 和 A_y) 与敏感轴延长线交点 (o_b) 的距离成正比, 也与振动频率成正比。以上分析表明, 由于在实际 SIMU 中加速度计之间的安装位置存在差异, 如果把加速度计测量当作“点测量组件”的输出进行导航解算, 则将从原理上造成速度解算误差, 称该误差为内杆臂效应速度误差, 并称 r_x 和 r_y 为内杆臂长度。同理, 也可对空间三维角运动情况进行分析, 能得出类似的结论。

以下再给出内杆臂效应的速度误差平均漂移率计算公式

$$\begin{cases} \nabla_x = \Delta v_x(T)/T = -2/\pi \cdot r_x \omega^2 Y_s(\alpha_0, 0, \pi/2) \\ \nabla_y = \Delta v_y(T)/T = -2/\pi \cdot r_y \omega^2 Y_s(\alpha_0, 0, \pi/2) \end{cases} \quad (5-15)$$

此外, 若仅取 t 从 $T/4$ 到 $3T/4$ 这段时间作分析, 容易求得

$$\int_{T/4}^{3T/4} a_x(t) dt = -r_x \omega Y_s(\alpha_0, \pi/2, 3\pi/2) = -2r_x \omega Y_s(\alpha_0, 0, \pi/2)$$

和

$$\int_{T/4}^{3T/4} a_y(t) dt = -2r_y \omega Y_s(\alpha_0, 0, \pi/2)$$

这说明该段时间内导航解算速度发生了变化, 而实际上 SIMU 在 $T/4$ 时刻和 $3T/4$ 时刻的真实速度是相同的, 且均为 0。上述例子说明了一个重要的现象: 若 SIMU 初始导航速度为零, 接着突然按正弦角速率绕 $o'_b z'_b$ 轴转动 $2\alpha_0$ 角度后再停止, 则由于内杆臂效应, 将在 ox 和 oy 轴出现导航解算速度误差, 即内杆臂效应速度误差 (例如 $\alpha_0 = 90^\circ$ 、 $r_x = r_y = 5\text{cm}$ 、 $\omega = 0.5\text{Hz}$, 则速度误差约为 -0.44m/s)。虽然该例子是在特定的角运动规律下进行计算才得到导航解算速度误差的具体公式和数值大小, 但是它足以说明, 在实际捷联惯导系统中, 如果加速度计的内杆臂

长度比较大,当运载体出现角运动,特别是方位急速转弯时,将可能引起严重的导航解算速度误差。

5.4 内杆臂效应的补偿方法

通过上一节的分析指出,当三个加速度计敏感轴互相垂直并且相交于一点时,内杆臂效应速度误差与角振动中心无关,(5-15)式表明在一定振幅下内杆臂效应造成的导航速度漂移率与内杆臂长度成正比,也与振动频率平方成正比。反过来说,如果利用速率转台给SIMU以适当的角振动规律,从导航解算速度漂移率中即可辨识出内杆臂长度。当然,如果能直接使用测量工具测得内杆臂长度是最简单的了。

获得内杆臂长度后,补偿内杆臂效应的基本思路是将加速度计敏感点处的加速度测量值折算至它们的敏感轴交点上,参见图5-1,也就是将加速度计 A_X 、 A_Y 和 A_Z 的输出折算至 o_b 点。假设SIMU的角运动速度矢量为 $\boldsymbol{\omega}^b = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$, 现以加速度计 A_X 为例,则易知 A_X 点加速度矢量 $\mathbf{a}_X = [a_{Xx} \ a_{Xy} \ a_{Xz}]^T$ 与 o_b 点加速度矢量 $\mathbf{a}_o = [a_{ox} \ a_{oy} \ a_{oz}]^T$ 之间的关系为

$$\mathbf{a}_X = \mathbf{a}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}}^b \times \mathbf{r}_x^b + \boldsymbol{\omega}^b \times (\boldsymbol{\omega}^b \times \mathbf{r}_x^b) \quad (5-16)$$

上式中 $\dot{\boldsymbol{\omega}}^b \times \mathbf{r}_x^b$ 和 $\boldsymbol{\omega}^b \times (\boldsymbol{\omega}^b \times \mathbf{r}_x^b) = (\boldsymbol{\omega}^b \times)^2 \mathbf{r}_x^b$ 分别代表 A_X 点相对于 o_b 点的切向加速度和法向加速度,由于加速度计 A_X 只敏感沿 $o_b x_b$ 轴向(法向)的加速度,将(5-16)式在 $o_b x_b$ 轴投影得加速度计 A_X 测量输出 a_{Xx} 为 $a_{Xx} = a_{ox} - (\omega_y^2 + \omega_z^2)r_x$, 移项后得 a_{ox} 计算公式,同理,可得加速度计 A_Y 测量输出 a_{Yy} 和加速度计 A_Z 测量输出 a_{Zz} 折算至 o_b 的计算公式,即

$$\begin{cases} a_{ox} = a_{Xx} + (\omega_y^2 + \omega_z^2)r_x \\ a_{oy} = a_{Yy} + (\omega_z^2 + \omega_x^2)r_y \\ a_{oz} = a_{Zz} + (\omega_x^2 + \omega_y^2)r_z \end{cases} \quad (5-17)$$

将(5-17)式记成矢量形式为

$$\mathbf{a}_o = \mathbf{a}_A - \boldsymbol{\omega}^b \times (\boldsymbol{\omega}^b \times \mathbf{r}^b) \quad (5-18)$$

其中 $\mathbf{a}_A = [a_{Xx} \ a_{Yy} \ a_{Zz}]^T$ 、 $\mathbf{r}^b = [r_x \ r_y \ r_z]^T$, 这就是进行内杆臂效应补偿的公式,经补偿后若将 o_b 视为导航信息参考点,则从原理上不会再造成任何杆臂效应误差。对比(5-18)式和(5-16)式,它们有些相似,然而(5-18)式缺少切向加速度项,从而与角速度的导数无关。从(5-18)式还可以看出,三个单轴加速度计的折算过程就像在矢径 $\mathbf{r}^b$ 末端处有一个虚拟的“点状”三轴加速度计一样,但

是虚拟加速度从 r^b 末端折算至 o_b 点时不必考虑切向加速度影响。

如果三个加速度计敏感轴不相互垂直或者不相交于一点，分析过程稍显复杂，可以指出的是，如果三个加速度计敏感轴不相交于一点，则在加速度的折算过程中必然与角速度的导数关联，这对角速率或角增量输出的陀螺来说，求导对实际导航解算的影响是不利的。通常在SIMU设计时对加速度计的安装都有一定的位置和方位要求，即要求三个加速度计敏感轴尽量相互垂直并且尽可能相交于一点，以降低内杆臂效应补偿的复杂性和减小导航解算误差。但是，与上述要求相反的不正规的安装方式在多加速度计冗余配置的SIMU中不仅是无法避免的，而且还是必不可少的，值得更深入地研究杆臂效应补偿问题。图5-5是加速度计任意安装的示意图（图中只画出 A_X 加速度计）。

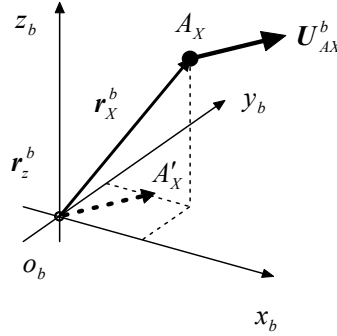


图5-5 加速度计任意安装条件下杆臂效应补偿

在图5-5中假设加速度计敏感点 A_X 与SIMU参考点 o_b 间的杆臂矢量为 r_X^b ， A_X 敏感方向的单位矢量为 U_{AX}^b ， r_X^b 和 U_{AX}^b 是可预先测量的（已知的杆臂参数）， A_X 点加速度矢量 a_X 与 o_b 点加速度矢量 a_o 之间的关系与（5-16）式相同，将其在 A_X 敏感方向投影，得 A_X 加速度计的输出 a_X 如下

$$a_X = a_X \cdot U_{AX}^b = [a_o + \dot{\omega}^b \times r_X^b + \omega^b \times (\omega^b \times r_X^b)] \cdot U_{AX}^b \quad (5-19)$$

令 $a_{oX} = a_o \cdot U_{AX}^b$ ，（5-19）式经整理得

$$a_{oX} = a_X - [\dot{\omega}^b \times r_X^b + \omega^b \times (\omega^b \times r_X^b)] \cdot U_{AX}^b \quad (5-20)$$

（5-20）式说明， A_X 加速度计输出 a_X 经杆臂效应补偿至 o_b 点后，相当于在 o_b 点处有一个虚拟的加速度计 A'_X ，其测量输出为 a_{oX} ，显而易见，虚拟加速度计的输出与真实的加速度计输出是同方向的。（5-20）式便是加速度计杆臂效应补偿的一般公式。

从上述加速度计杆臂效应补偿中，原则上，可以得出以下捷联惯组在实际使用中的标定计算流程：首先是进行陀螺标定计算（包括当量转换、漂移扣除与横

侧向校正), 将陀螺采样输出转换并投影至正交的标定坐标系 b 系, 获得 ω^b ; 再在加速度计当量转换和零偏扣除后, 利用加速度计杆臂参数和陀螺标定结果 ω^b 进行加速度计杆臂效应补偿, 获得 a_{oX}, a_{oY}, a_{oZ} ; 最后进行虚拟的加速度计横侧向校正, 也将虚拟的加速度计输出投影至 b 系。

假设加速度计输入输出模型是线性的, 即

$$a_i = k_{Ai} N_{Ai} - \nabla_i \quad (i = X, Y, Z) \quad (5-21)$$

其中 N_{Ai} 、 k_{Ai} 、 ∇_i 分别为加速度计采样脉冲输出、脉冲当量和零偏, 则单个加速度计的标定计算公式为

$$a_{oi} = (k_{Ai} N_{Ai} - \nabla_i) - \{[(\dot{\omega}^b \times) + (\omega^b \times)^2] r_i^b\} \cdot U_{Ai}^b \quad (5-22)$$

将三个加速度计标定合在一起, 写成矢量形式, 并投影至 b 系, 得

$$\begin{aligned} a_o &= U_{AX}^b a_{oX} + U_{AY}^b a_{oY} + U_{AZ}^b a_{oZ} = \begin{bmatrix} U_{AX}^b & U_{AY}^b & U_{AZ}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{oX} \\ a_{oY} \\ a_{oZ} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} k_{AX} U_{AX}^b & k_{AY} U_{AY}^b & k_{AZ} U_{AZ}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{AX} \\ N_{AY} \\ N_{AZ} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_{AX}^b & U_{AY}^b & U_{AZ}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_X \\ \nabla_Y \\ \nabla_Z \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} U_{AX}^b & U_{AY}^b & U_{AZ}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{[(\dot{\omega}^b \times) + (\omega^b \times)^2] r_X^b\} \cdot U_{AX}^b \\ \{[(\dot{\omega}^b \times) + (\omega^b \times)^2] r_Y^b\} \cdot U_{AY}^b \\ \{[(\dot{\omega}^b \times) + (\omega^b \times)^2] r_Z^b\} \cdot U_{AZ}^b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5-23)$$

记 $K_A = [k_{AX} U_{AX}^b \quad k_{AY} U_{AY}^b \quad k_{AZ} U_{AZ}^b]$ 为脉冲当量矩阵、 $U_A = [U_{AX}^b \quad U_{AY}^b \quad U_{AZ}^b]$ 为加速度计敏感方位矩阵。在 (5-23) 式中, 前半部分标定计算与不考虑杆臂效应的加速度计标定完全相同, 而后半部分计算仅与杆臂效应补偿有关, 与加速度无关, 也就是说, 杆臂效应补偿可以独立于常规加速度计标定。从 (5-23) 式还可以看出, 每个加速度计的敏感方位矢量 U_{Ai}^b 都可以从脉冲当量矩阵 K_A 中提取获得。

5.5 内杆臂效应试验

利用某型号激光捷联惯导系统进行试验, 其中激光陀螺精度 $0.01^\circ/\text{h}$, 加速度计精度 $5 \times 10^{-5}g$ 。捷联惯导系统放置在单轴试验转台上, 转台台面基本水平, 启动惯导系统加温稳定后, 进行 5min 的初始对准, 初始对准完毕后将方位转至约 180° , 开始记录惯导导航数据输出。接着用手动方法绕方位轴进行 7 次 $\pm 180^\circ$ 转动, 方位角大约在 $0^\circ \sim 180^\circ$ (或 -180°) 之间变化, 7 次转动如图 5-6 中 1, 2, 3...7

数字所示, 整个过程中惯导系统方位角输出如图中蓝色实线所示, 而转动方位角速率如红色虚线所示, 其中最大角速率约为 $250^{\circ}/\text{s}$ (不超过该惯组陀螺的最大标称角速率 $400^{\circ}/\text{s}$)。图5-7是相应的导航速度误差输出曲线, 从该图中看出, 每转动 180° 后速度误差都变大了, 方位转动角速度率越大, 速度误差增加得越明显, 最后在100s后东向和北向的速度误差分别多达 1.1m/s 和 0.9m/s (只有天向速度误差几乎不变)。

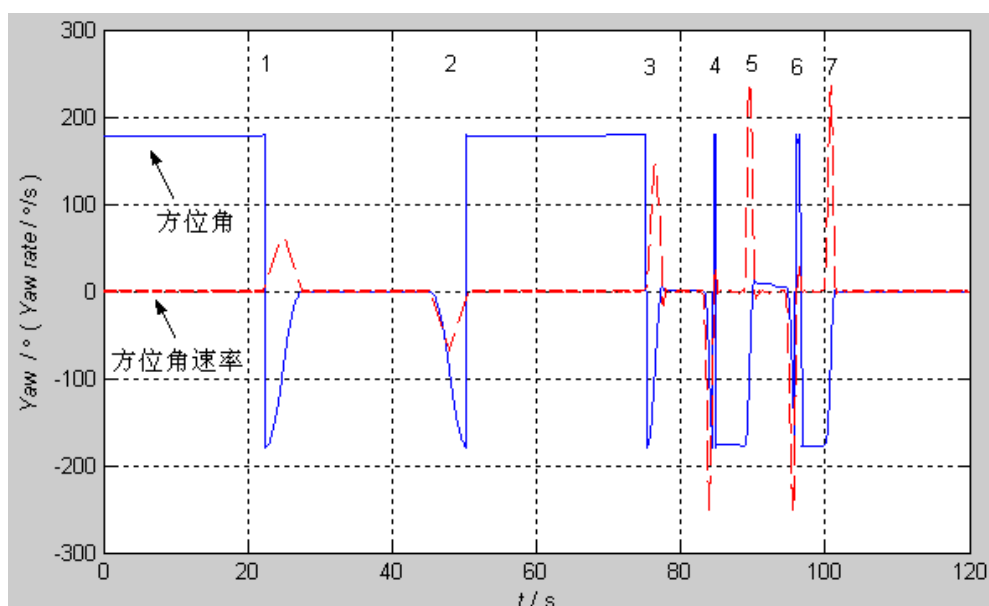


图5-6 惯组转动方位角及方位角速率

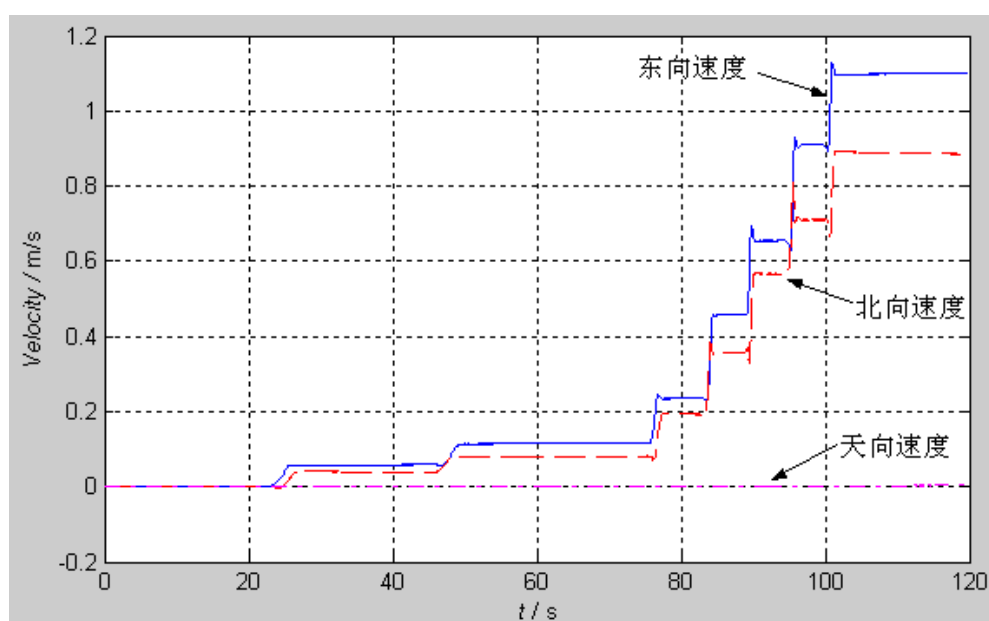


图5-7 捷联惯导系统速度误差

根据上一小节内杆臂速度误差分析和补偿原理,这里采用试凑的方法补偿捷联惯组水平x轴和y轴两个加速度计的杆臂长度,当取 $r_x=0.0235\text{m}$ 和 $r_y=-0.029\text{m}$ 时,内杆臂效应补偿后的惯导系统速度误差如图5-8所示,此时速度误差得到了明显抑制,说明内杆臂效应补偿是非常有效的。上述杆臂长度的取值还说明了,2~3cm的杆臂长度有可能造成巨大的速度误差,在捷联惯导系统硬件和软件算法设计中应引起足够的重视。当然实际应用中还应对z轴加速度计补偿,文中没有作这项工作。

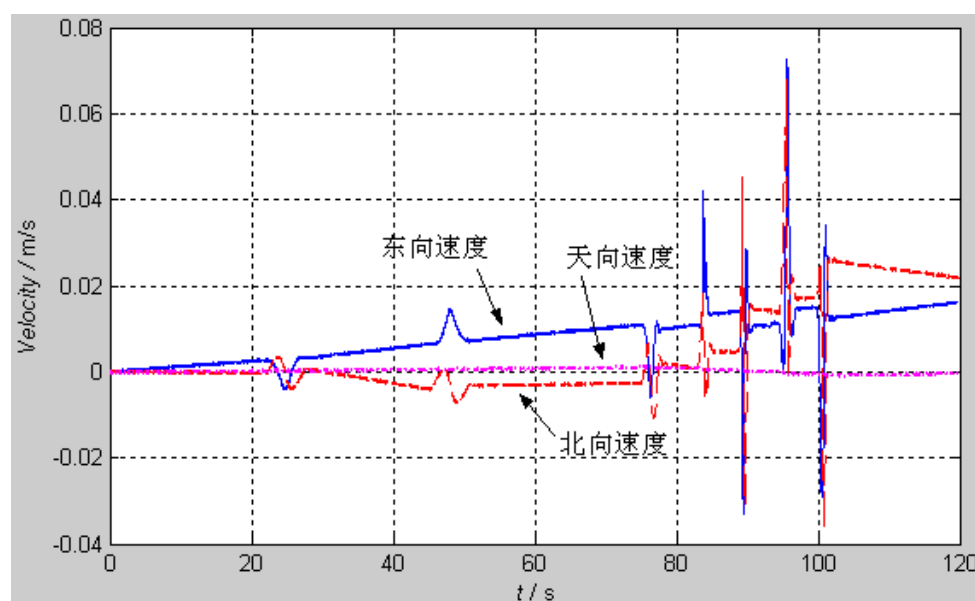


图5-8 内杆臂补偿后的速度误差

本试验说明内杆臂效应是捷联惯导系统的一个重要误差源。事实上,与平台惯导系统相比,由于物理上隔离角运动功能的缺失,捷联系统误差源更多。文献[41]指出了一些捷联系统专有的误差源,包括与机动有关的误差和与振动有关的误差,文献[40]分析的标定引起的误差属于与机动有关的误差,而本章分析的内杆臂效应误差在大角速率机动下可以认为是与机动有关的误差,但在角振动环境下亦可认为是与振动有关的误差。

鉴于捷联系统误差源众多,作者认为捷联惯导系统不适合应用于零速修正场合,至少对于需要按任意路径行驶并且实时提供准确定位信息(如10m量级)的车载导航系统而言是不适合的。在经典的平台惯导系统大地测量中,一般要求路径(或称其为导线)是“直伸状”的,并且拥有起、止控制点^[42],通过多次测量进行平差或事后平滑处理,才能达到优于10m的定位精度。此外,目前多以光学陀螺,如激光陀螺和光纤陀螺,与石英加速度计一起构建捷联惯导系统,由于光学陀螺噪声大并且漂移相关时间短、石英加速度计温度误差系数大等因素,使得

捷联惯导系统速度误差的规律性与平台惯导系统相比更弱。作者曾在多次高精度捷联惯导系统作零速修正的试验中发现,应用曲线拟合的方法进行捷联惯导系统零速修正并不合适,特别是在载车转弯机动时,或者系统准备时间不够充分时,曲线拟合误差比较大,甚至该方法完全不能使用。因此,就目前国内的捷联惯性器件制造水平而言,研究者或者应当放弃在车载捷联惯导系统中使用零速修正的功能,或者应当降低捷联系统零速修正的精度指标要求,或者应当建立比平台系统更复杂的捷联系统误差模型,否则,照搬平台系统零速修正的研究成果和结论是很难凑效的。国内外平台系统零速修正技术已经比较成熟,然而捷联系统相关产品却鲜有报道,也足以见其实现的困难程度了(少见捷联零速修正系统也可能存在这些原因:目前对捷联系统零速修正技术需求不如当时历史条件下对平台的那样迫切,或者当前高精度定位测量手段如GPS等早已垂手可得)。

5.6 杆臂效应引起的划船运动误差探讨

划船运动误差是由捷联惯导数值积分算法引起的,属于算法性误差,区别于杆臂效应补偿的原理性误差。即使把SIMU当作“点测量组件”,这种算法性误差也是存在的,它还与振动中心的位置,即外杆臂长度有关。现分析如下,参见图5-2,假设振动幅值 α_0 是小量,忽略关于 α_0 的二阶小量,则在(5-6)式中,除 $a_y(t)$ 简化为(5-24)式外,其余各式均近似为0。

$$a_y(t) \approx -r\alpha_0\omega^2 \sin(\omega t) \quad (5-24)$$

可见,加速度 $a_y(t)$ 平行于 oy 轴,而角振动 $\dot{\alpha}(t) = \alpha_0\omega \cos(\omega t)$ 平行于 oz 轴,因此,未作划船运动补偿时在捷联惯导算法中将产生沿 ox 轴的划船运动误差^[1],其速度漂移率大小为

$$\Delta v_{scull} / T = r\alpha_0^2\omega^2 \quad (5-25)$$

划船运动误差速度漂移率与外杆臂长度成正比,因此,除了在捷联惯导算法中应采样划船误差补偿算法外,还应尽量将SIMU安装在运载体振动中心附近(如舰船的摇摆中心附近)。对比(5-15)和(5-25)式,可知在外杆臂长度比较大时,有效的划船误差补偿是利用试验方法进行正确的内杆臂长度计算的前提。

此外,即使运载体或使用环境没有角振动,在含有振动源的SIMU中,如由机械抖动偏频激光陀螺构成的捷联惯组,也可能出现划船运动误差^[43],可以将它看成是外杆臂划船误差的一个“微型缩影”。例如,在激光陀螺捷联惯组中,激光陀螺的抖动会经减震器诱导SIMU共振,如果共振中心与经内杆臂补偿效应后的加

速度组件中心不重合, 假设共振幅值 $\alpha_0=30''$ 、频率 $\omega=10\text{Hz}$ 、加速度计组件中心离共振中心的杆臂长度 $r=5\text{cm}$, 则 $\Delta v_{scull}/T \approx 4 \times 10^{-7} g$, 当然, 在惯性级精度的导航系统中, 该值可以忽略不计。

5.7 本章小结

在SIMU中的三个加速度计敏感轴互相垂直并且相交于一点的比较理想的条件下, 分析了内杆臂效应产生的原因, 即是由于虚拟法向加速度积分与虚拟切向加速度积分无法完全抵消造成的, 内杆臂效应速度漂移率与角振动中心无关, 而与内杆臂长度成正比, 也与振动频率平方成正比。进行内杆臂效应补偿的方法是将加速度计敏感点处的加速度测量值折算至它们的敏感轴交点上。如果SIMU的加速度计敏感轴不相互垂直或者不相交于一点, 内杆臂效应的分析和补偿过程会比较复杂, 但是这一问题在多加速度计冗余配置的SIMU中是无法避免的, 本章对此也作了一些更深入的探讨。

第六章 激光陀螺整周期采样的影响与修正

6.1 引言

激光陀螺的闭锁区是影响其测量灵敏度的重要因素,采用各种偏频方法减小闭锁区的影响是发展激光陀螺的一项关键技术。由于机械抖动偏频具有结构简单和承受冲击能力强等诸多优点,它是应用最早和最成熟的激光陀螺偏频技术,其原理是采用小振幅高速机械抖动装置强迫环形激光器绕垂直于谐振腔环路平面的轴线来回转动,为谐振腔内相向行波对提供快速交变偏频^[44, 45]。为了获得反映运载体角运动信息,必须消除机械抖动偏频的影响,其方法有^[46-49]:①对陀螺输出进行高速采样,通过数据滤波提取有用信息(高频采样);②利用高精度传感器测量激光器相对于陀螺壳体运动偏角,再在陀螺输出中扣除该偏角;③当机械抖动装置相对陀螺壳体抖动过平衡位置时,提供触发信号对陀螺输出进行采样(整周期采样)。上述第一种方法,即高频采样,要求计算机具有很强的处理能力和好的数据处理方法;第二种方法对角度传感器要求比较高;第三种方法,整周期采样,实现简单,对消除偏频信号非常有效,当运载体角运动比较平稳时,容易满足测量要求,具有一定的应用价值。

目前,国内在中高精度激光陀螺捷联惯导系统(LSINS)中普遍采用高频采样方式解决抖动解调问题,但是,由于高频采样引入的低通滤波器的影响,处于滤波器通带内的陀螺有效信号的幅频和相频特性也不可避免的发生变化,信号的微小畸变可能引入较大的姿态算法误差,为了减小信号滤波对姿态算法精度的影响,文献[50-53]提出了对经典圆锥补偿算法进行修正的公式,修正效果令人满意。在高频采样的低通滤波器中一般采用FIR滤波器,使用FIR滤波器必然带来相位延迟问题,当导航系统参与制导控制时,过大的延时可能影响制导控制系统的控制回路性能。例如当角运动速率 $200^{\circ}/s$ 、高频采样频率 $2000Hz$ 、FIR滤波器为30阶时,将带来 $7.5ms$ 时延和产生 1.5° 的角度测量误差,这在某些苛刻的应用环境中必需予以重视。原理上,利用高频采样和测角传感器相结合的方法,既能降低对测角传感器的精度要求,又能很好减弱相位延迟的问题,但是实现起来稍微复杂一些。

虽然激光陀螺的整周期采样抖动解调技术在中高精度LSINS中应用不多,但是其方法实现简单,与高频采样相比对系统性能要求不高,因而具有一定的应用

价值。

在设计 LSINS 时,三个激光陀螺之间机械抖动频率应当交错开,建议相差 30Hz 以上^[47]。当陀螺输出采用整周期锁存方式时,导航计算机定时采样系统采集到的三个陀螺信号,隐含着陀螺输出的不同步,如果运载体角运动比较剧烈,整周期采样方法中存在以下缺点:①运载体运动角速率难以实时准确测量;②运载体姿态角测量存在延迟难以估计和补偿;③由于三个轴激光陀螺整周期锁存不同步,造成姿态解算的不可交换误差,误差随时间不断增长。

本章拟对整周期采样对捷联惯导姿态解算的影响及其修正方法作进一步的研究。首先介绍了整周期锁存时陀螺输出采样的不同步现象,在圆锥运动条件下对不同步问题引起的姿态解算误差进行仿真,仿真结果在实际应用中具有一定的参考价值。在修正方面,提出了对激光陀螺整周期采样进行修正的方法,仿真表明它能消除运动角速率和姿态角测量不准的缺点,并有效降低了在圆锥运动环境下的姿态漂移误差,研究结果将有助于增加整周期采样的实际应用价值。

6.2 整周期锁存和定时采样简介

如图 6-1 所示, g_x 、 g_y 、 g_z 三条横线分别代表 SINS 中三个轴激光陀螺的输出时序,线上每一个节点表示整周期锁存的时刻,由于各个激光陀螺机械抖动周期不相等,因此它们的整周期锁存周期不同,即整周期锁存时刻也不相同。图中, t_k 、 t_{k+1} 、 t_{k+2} 表示导航计算机定时采样时刻,采样周期为 h 。可以看出,图中共有四个独立的时钟系统(三个陀螺整周期锁存时钟加上一个导航计算机定时采样时钟,它们彼此间相互独立)。

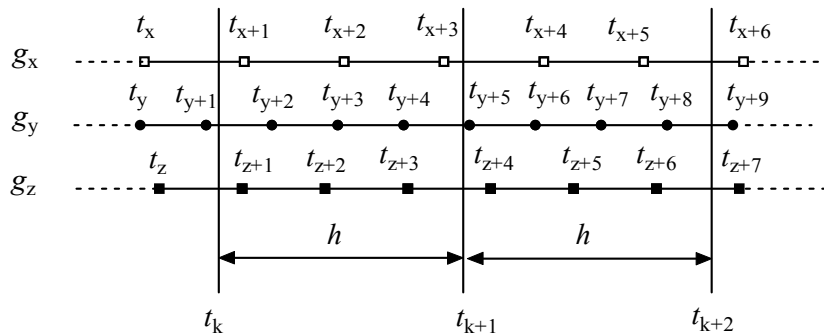


图 6-1 激光陀螺整周期锁存与定时采样示意图

在导航计算机定时采样 t_{k+1} 时刻, g_x 陀螺输出采样值为 t_x 至 t_{x+3} 时间段内的角增量(期间共包含 g_x 陀螺的三个整周期锁存周期);而在 t_{k+2} 采样时刻, g_x 陀螺输出采样值为 t_{x+3} 至 t_{x+5} 时间段内的角增量(期间只包含 g_x 陀螺的两个整周期锁

存周期)。这表明,虽然导航计算机定时采样时钟周期不变,但是不同采样时刻采集到的陀螺输出可能包含不等周期数的整周期锁存角增量,即导航计算机采样时间长度与期间陀螺输出时间长度之间没有确定的关系。由于难以准确获得陀螺输出时间长度,就造成了利用角增量输出求取瞬时角速率的困难。其它两个轴的陀螺采样输出情况分析也类似于 g_x 陀螺。还须指出,三个轴陀螺从各自的最近一次整周期锁存时刻到导航计算机采样时刻的采样延迟时间也是不相等的(如在 t_{k+1} 采样时刻,三个陀螺采样延迟分别为 $t_{k+1} - t_{x+3}$ 、 $t_{k+1} - t_{y+4}$ 、 $t_{k+1} - t_{z+3}$)。由于陀螺输出时间长度不等和延迟时间不等的影响,如果捷联惯组三个轴都存在持续角运动,在捷联惯导算法中就可能产生角运动不可交换性误差并不断积累,最终导致严重姿态解算误差。

6.3 整周期锁存误差仿真

显然,如果捷联惯组只绕其某一激光陀螺敏感轴作角运动,其它两轴不转动,则激光陀螺输出时间长度不等和延迟时间不等就不会产生姿态解算累积误差。对于 SINS 姿态算法,最不利的角运动环境是圆锥运动,以下在圆锥运动环境下分析激光陀螺整周期采样对姿态解算误差的影响。

6.3.1 圆锥运动描述

如图 6-2,动坐标系 b 系相对参考坐标系 r 系绕 $o_r z_r$ 轴作圆锥运动,半锥角为 α ,锥运动频率为 ω ,即: b 系与 r 系坐标原点重合, $o_b x_b$ 轴以 $o_r x_r$ 轴为对称中心,在 $x_r o_r z_r$ 平面内作幅值为 α 的振动; $o_b y_b$ 轴以 $o_r y_r$ 轴为中心,在 $y_r o_r z_r$ 平面内幅值为 α 的振动; $o_b z_b$ 轴在以 $o_r z_r$ 轴为中心的圆锥面上运动。

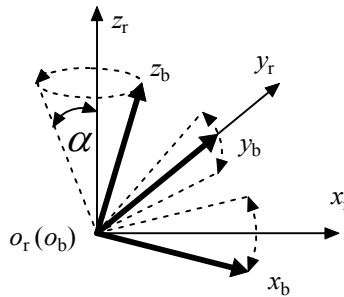


图 6-2 b 系相对 r 系作圆锥运动

该圆锥运动可用等效旋转矢量描述为

$$\Phi = [\alpha \cos \omega t \quad \alpha \sin \omega t \quad 0]^T \quad (6-1)$$

动坐标系 b 相对参考坐标系 r 的方位关系还可用姿态四元数描述为

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & \sin \frac{\alpha}{2} \cos \omega t & \sin \frac{\alpha}{2} \sin \omega t & 0 \end{bmatrix}^T \quad (6-2)$$

在指北方位 SINS 中, 导航坐标系依次经过三次欧拉角 (分别为方位角 ψ 、俯仰角 θ 和横滚角 γ) 旋转, 可获得运载体坐标系, 类似的, b 系与 r 系之间的关系也可以利用上述三个欧拉角描述 (相当于把 r 系当作导航坐标系, 即把 b 系当作运载体坐标系), 从姿态四元数 $\mathbf{Q}(t)$ 中容易求得这三个欧拉角, 详见参考文献[40], 本章后面仿真时将用到这三个欧拉角。动坐标系 b 系相对参考坐标系 r 系的圆锥运动角速度矢量描述为

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \begin{bmatrix} -\omega \sin \alpha \sin \omega t & \omega \sin \alpha \cos \omega t & -2\omega \sin^2 \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}^T \quad (6-3)$$

由圆锥运动角速度矢量 (6-3) 式积分, 可得两个相邻采样时刻之间的理想角增量输出

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_{k+1} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{\omega}(t) dt = \begin{bmatrix} -2 \sin \alpha \sin(\frac{\omega h}{2}) \sin[\omega(t_k + \frac{h}{2})] \\ 2 \sin \alpha \sin(\frac{\omega h}{2}) \cos[\omega(t_k + \frac{h}{2})] \\ -2(\omega h) \sin^2(\frac{\alpha}{2}) \end{bmatrix} \quad (6-4)$$

其中 $k=0,1,2,3\dots$, $h=t_{k+1}-t_k$ 为采样周期, $\Delta \boldsymbol{\theta}_{k+1}$ 为从 t_k 时刻到 t_{k+1} 时刻的角增量, 即 t_{k+1} 时刻采样获得的理想角增量输出。

6.3.2 圆锥运动环境下整周期采样的角增量仿真

公式 (6-4) 为圆锥运动时理想的角增量输出采样表达式。如果考虑到激光陀螺整周期锁存的不同步, 假设三个激光陀螺机械抖动频率分别为 f_x 、 f_y 、 f_z (即周期锁存周期分别为 $T_x=1/f_x$ 、 $T_y=1/f_y$ 、 $T_z=1/f_z$), 并不妨假设起始 t_0 时刻三个激光陀螺是同步开始抖动的, 则不计激光陀螺量化效应时, 在 t_{k+1} 时刻采样获得的陀螺角增量输出为

$$\Delta \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k+1} = \begin{bmatrix} -2 \sin \alpha \sin(\frac{\omega h_{xk}}{2}) \sin[\omega(t_{xk} + \frac{h_{xk}}{2})] \\ 2 \sin \alpha \sin(\frac{\omega h_{yk}}{2}) \cos[\omega(t_{yk} + \frac{h_{yk}}{2})] \\ -2(\omega h_{zk}) \sin^2(\frac{\alpha}{2}) \end{bmatrix} \quad (6-5)$$

式中, $t_{ik} = \text{int}[t_k / T_i] \cdot T_i$, $h_{ik} = \text{int}[t_{k+1} / T_i] \cdot T_i - t_{ik}$, ($i = x, y, z$), $\text{int}[\bullet]$ 表示取整。

例如, 在某型号激光捷联惯组中, 三个激光陀螺的机械抖动频率分别为 x 轴 370Hz、y 轴 359Hz、z 轴 408Hz, 当作幅值 $\alpha = 10^\circ$ 、周期 $\omega = 0.7\text{Hz}$ 的圆锥运动, 采样周期 $h = 10\text{ms}$ 时, 经过仿真其三个轴角增量输出如图 6-3 所示。图中虚线为理想角增量输出, 而实线为整周期锁存时的采样输出。从图中可以看出, 整周期锁存采样输出波动较大——“锯齿”现象, 如果直接用它除以采样时间间隔计算 SINS 的瞬时角速率必将产生很大跳动误差。

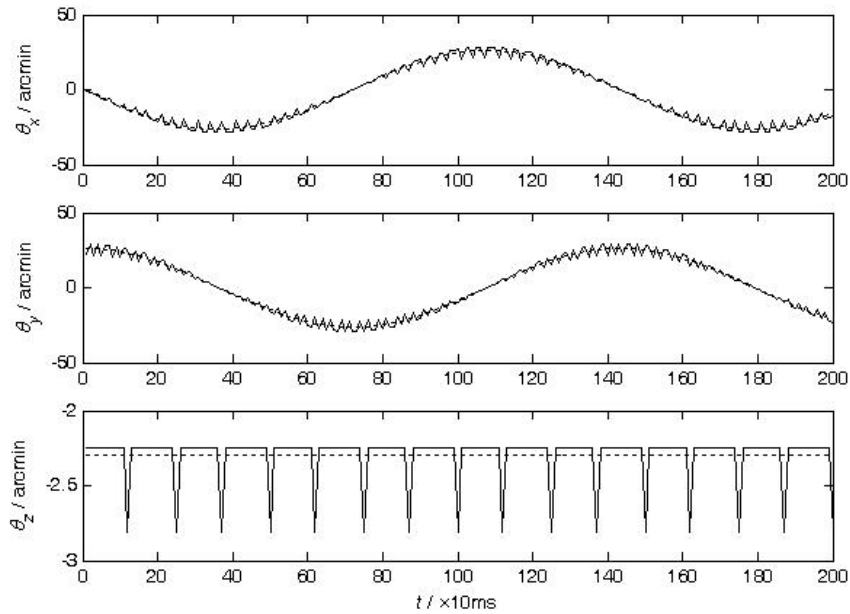


图 6-3 圆锥运动条件下角增量采样输出

6.3.3 整周期采样对姿态解算的影响

在圆锥运动条件下, 许多文献研究推导出了半圆锥角、圆锥运动频率、采样周期与等效旋转矢量算法漂移误差之间的关系表达式。但是, 如果还要进一步考虑到激光陀螺整周期锁存不同步的问题, 势必使得研究算法漂移误差关系变得非常复杂。因此, 本节打算利用计算机仿真的方法来研究整周期采样对算法漂移误差的影响。

同上节假设: 激光陀螺机械抖动频率 x 轴 370Hz、y 轴 359Hz、z 轴 408Hz, 锥运动幅值 $\alpha = 10^\circ$ 、周期 $\omega = 0.7\text{Hz}$, 采样周期 $h = 10\text{ms}$ 。选用等效旋转矢量双子样优化算法分别对理想角增量输出和整周期采样输出进行姿态更新解算, 求得姿态角和方位角的误差, 结果如图 6-4 所示。图中虚线是理想角增量输出时的姿态和方位误差角, 误差都很小, 接近于零; 实线表示的是整周期采样输出时的姿态和方位误差角, 它出现明显周期性和随机变化, 周期性变化反映了圆锥运动的周

周期性, 随机变化是由于陀螺整周期锁存引起的, 运载体角运动快时随机变化幅值也大, 姿态和方位误差角均没有明显的累积增大趋势。但是, 经过长时间(10min)的仿真, 结果如图 6-5 所示, 整周期采样输出时方位误差角有一定的发散趋势, 最终接近 2° , 这说明整周期采样会引起捷联惯导姿态算法漂移误差。

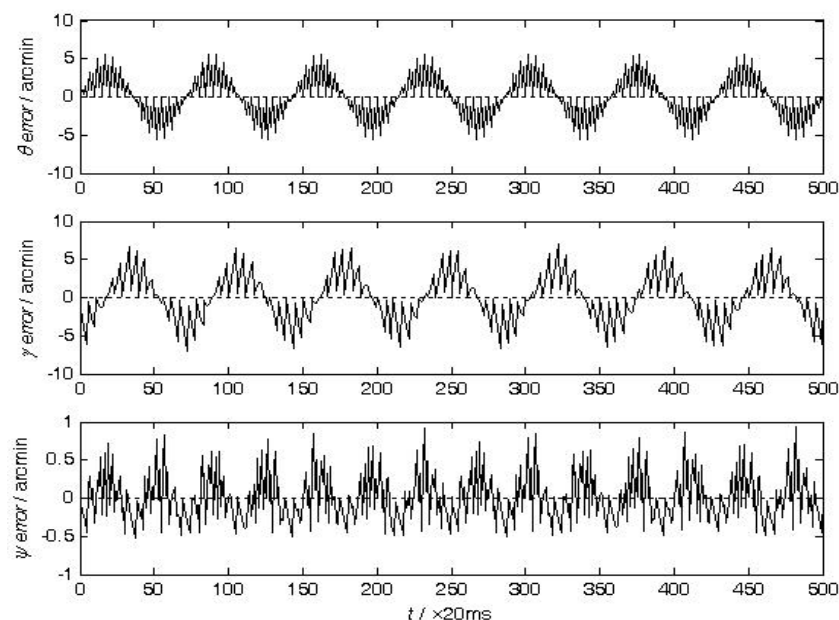


图 6-4 圆锥运动条件下姿态和方位解算误差

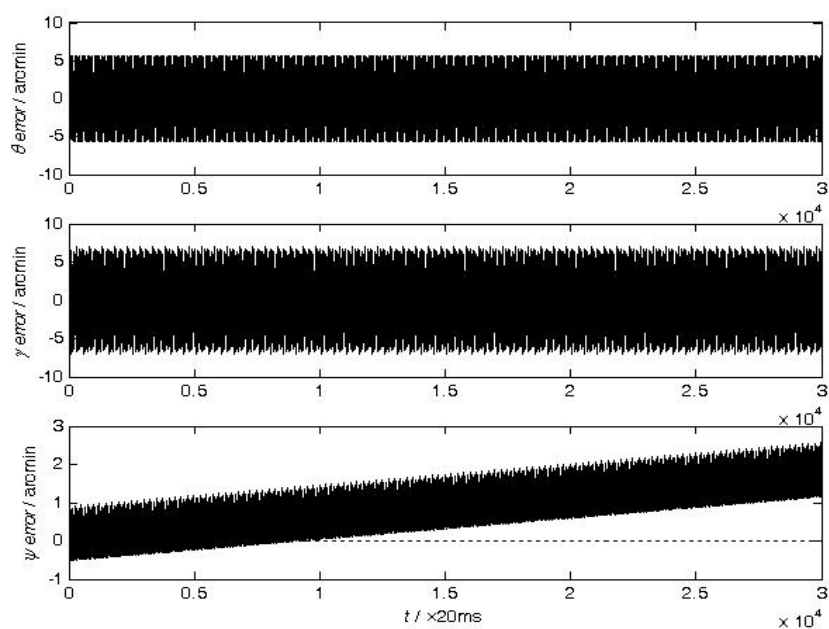


图 6-5 圆锥运动条件下姿态和方位解算误差 (10min)

进一步仿真表明, 圆锥运动幅值、频率、激光陀螺机械抖动频率、导航计算

机采样周期、所选择的等效旋转矢量算法等因素都与姿态算法漂移误差速率有关。如果增加圆锥运动频率，则整周期采样时方位误差角变化速度将急剧增大，远远大于理想采样输出条件下的方位误差角。如图 6-6 所示，仿真时选择圆锥角 1° ，圆锥运动频率 5Hz，图中，10min 后理想角增量采样输出时方位误差角约 $3'$ ，而整周期采样时方位误差角约 $47'$ ，后者大约是前者的 18 倍。同样的，理想和整周期两种采样情况下俯仰和横滚误差角都没有明显的增长趋势。

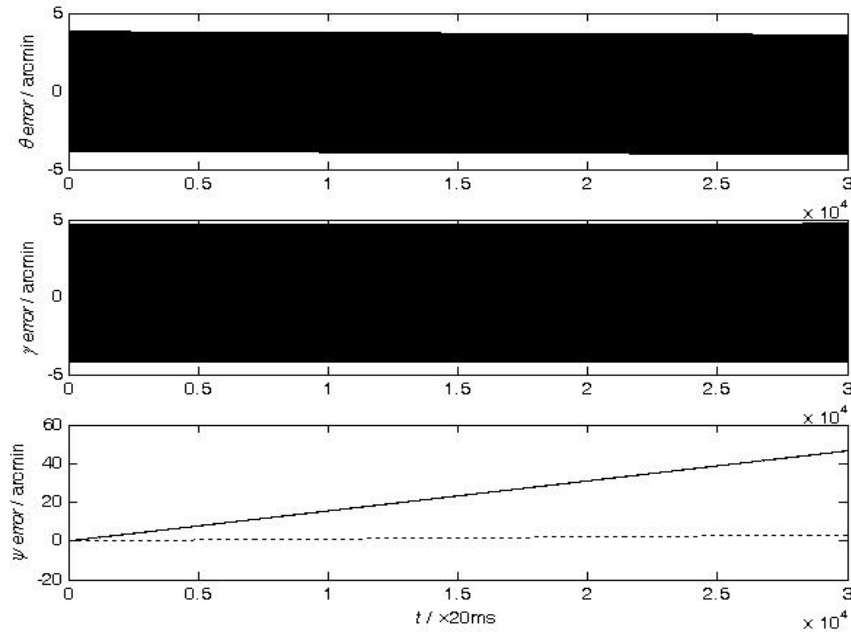


图 6-6 圆锥运动条件下姿态和方位解算误差 (5Hz)

6.4 整周期采样的修正

6.4.1 修正的基本原理

对整周期采样进行修正，比较简单而又实用的方法是在陀螺采样电路中增加一些触发信号和计数器。以 g_x 陀螺为例，每当陀螺机械抖动过平衡位置时，可以利用过平衡信号复位计数器并使计数器重新开始以一定的频率累加计数，而当导航计算机定时采样信号到来时，以定时采样信号终止计数器计数，最后在计算机采样程序中同时读取陀螺的脉冲数和相应计数器的计数值。因为计数器的计数频率是事先已知的，所以容易求得 g_x 陀螺的整周期锁存 t_x 时刻至计算机定时采样 t_k 时刻的时间长度 $t_k - t_x$ ，不妨以 $h_{x,k}$ 表示之，即 $h_{x,k} = t_k - t_x$ ，如图 6-7 所示，同样可以求得图示的时间长度 $h_{x+3,k+1} = t_{k+1} - t_{x+3}$ 和 $h_{x+5,k+2} = t_{k+2} - t_{x+5}$ 。知道了陀螺的整周期锁存时刻至计算机定时采样时刻的时间长度，就能够借助外推算法估计

出该时间段内陀螺输出的角增量，从而对计算机定时采样角增量进行修正。

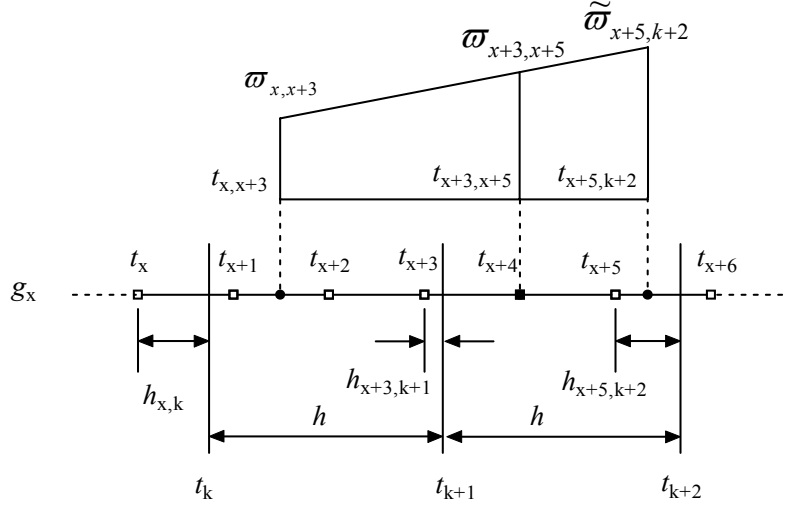


图 6-7 激光陀螺整周期采样修正示意图

下面以角速率线性外推为例来估计 g_x 陀螺在 $h_{x+5,k+2}$ 时间段内的角增量。

首先，记 t_x 时刻至 t_{x+3} 时刻的时间中点、 t_{x+3} 时刻至 t_{x+5} 时刻的时间中点、 t_{x+5} 时刻至 t_{k+2} 时刻的时间中点分别为 $t_{x,x+3}$ 、 $t_{x+3,x+5}$ 和 $t_{x+5,k+2}$ ，即有

$$t_{x,x+3} = \frac{t_x + t_{x+3}}{2} = \frac{(t_k - h_{x,k}) + (t_k + h - h_{x+3,k+1})}{2} = t_k + \frac{h - h_{x,k} - h_{x+3,k+1}}{2} \quad (6-6)$$

$$\begin{aligned} t_{x+3,x+5} &= \frac{t_{x+3} + t_{x+5}}{2} = \frac{(t_k + h - h_{x+3,k+1}) + (t_k + 2h - h_{x+5,k+2})}{2} \\ &= t_k + h + \frac{h - h_{x+3,k+1} - h_{x+5,k+2}}{2} \end{aligned} \quad (6-7)$$

$$t_{x+5,k+2} = \frac{t_{x+5} + t_{k+2}}{2} = \frac{(t_k + 2h - h_{x+5,k+2}) + (t_k + 2h)}{2} = t_k + 2h - \frac{h_{x+5,k+2}}{2} \quad (6-8)$$

其次，假设计算机定时采样在 t_{k+1} 时刻和 t_{k+2} 时刻读取 g_x 陀螺的角增量输出分别为 $\Delta\theta_{k+1,x}$ 和 $\Delta\theta_{k+2,x}$ ，则若以 t_x 时刻至 t_{x+3} 时刻内的平均角速率代替该段时间中点 $t_{x,x+3}$ 时刻的角速率 $\varpi_{x,x+3}$ ，得

$$\varpi_{x,x+3} = \frac{\Delta\theta_{k+1,x}}{t_{x+3} - t_x} = \frac{\Delta\theta_{k+1,x}}{h + h_{x,k} - h_{x+3,k+1}} \quad (6-9)$$

同理求得中点 $t_{x+3,x+5}$ 时刻的角速率

$$\varpi_{x+3,x+5} = \frac{\Delta\theta_{k+2,x}}{t_{x+5} - t_{x+3}} = \frac{\Delta\theta_{k+2,x}}{h + h_{x+3,k+1} - h_{x+5,k+2}} \quad (6-10)$$

最后，利用梯形边长之间的比例关系式，参见图 6-7 中梯形部分，可线性外推估计得 $t_{x+5,k+2}$ 时刻的角速率 $\tilde{\omega}_{x+5,k+2}$ ，即可由比例关系式

$$\frac{\tilde{\omega}_{x+5,k+2} - \omega_{x+3,x+5}}{\omega_{x+3,x+5} - \omega_{x,x+3}} = \frac{t_{x+5,k+2} - t_{x+3,x+5}}{t_{x+3,x+5} - t_{x,x+3}} \quad (6-11)$$

再将 (6-6) 式～(6-8) 式代入 (6-11) 式，经过整理求得

$$\tilde{\omega}_{x+5,k+2} = \omega_{x+3,x+5} + \frac{h + h_{x+3,k+1}}{2h + h_{x,k} - h_{x+5,k+2}} (\omega_{x+3,x+5} - \omega_{x,x+3}) \quad (6-12)$$

获得线性外推角速率 (6-12) 式后，进一步可粗略计算出从整周期锁存 t_{x+5} 时刻至计算机定时采样 t_{k+2} 时刻的陀螺输出角增量修正量为

$$\tilde{\delta\theta}_{k+2,x} = \tilde{\omega}_{x+5,k+2} h_{x+5,k+2} \quad (6-13)$$

同理在其它计算机定时采样时刻也可以估计得角增量修正量 $\tilde{\delta\theta}_{i,x} (i=0,1,2\dots)$ 。至此，可以构造如下式，最终得到修正后的 g_x 陀螺角增量输出

$$\Delta\tilde{\theta}_{i+1,x} = \Delta\theta_{i+1,x} + \tilde{\delta\theta}_{i+1,x} - \tilde{\delta\theta}_{i,x} \quad (6-14)$$

显然，修正公式 (6-14) 式保证了陀螺总角增量输出不变，而它改变了角增量在时间轴上的分布，所以在 SINS 有角速度运动时能够减轻“锯齿”症状，使修正后的陀螺输出比修正前的更加平滑，趋于符合捷联惯组的实际角运动情况。

除了利用线性外推算法对整周期采样进行修正外，还可以利用常值或抛物线等外推算法进行修正，这里不再叙述它们的推导过程。

6.4.2 修正后的仿真效果

采用同 6.3.3 节一样的仿真条件：激光陀螺机械抖动频率 x 轴 370Hz、y 轴 359Hz、z 轴 408Hz，圆锥运动幅值 $\alpha=1^\circ$ 、频率 $f=5\text{Hz}$ 、采样周期 $h=10\text{ms}$ 、选用等效旋转矢量二子样算法，仿真结果如图 6-8 所示，其中俯仰角 θ 误差和横滚角 γ 误差只显示了前 6s，而方位角 ψ 误差为 10min，在图中虚线、点划线、实线分别代表的是采用理想角增量输出、整周期采样输出、整周期采样线性外推修正三种姿态更新算法的姿态和方位误差角。从图中可以看出，经过整周期采样修正后水平姿态误差角减小了很多，其幅值从修正前的最大约 $4'$ 降低至修正后的 $0.1'$ 以下，10min 时方位误差角也从修正前的约 $47'$ 减小到了 $-6'$ 。由此可见，整周期采样修正对提高 LSINS 的角度测量精度，降低圆锥运动漂移误差是非常有效的。

另外，在圆锥运动条件下、采样周期 $h=10\text{ms}$ 、姿态算法选用等效旋转矢量二子样算法时，而其它条件变化时，再进行了六组仿真试验，仿真条件和结果如

表 6-1 所示。

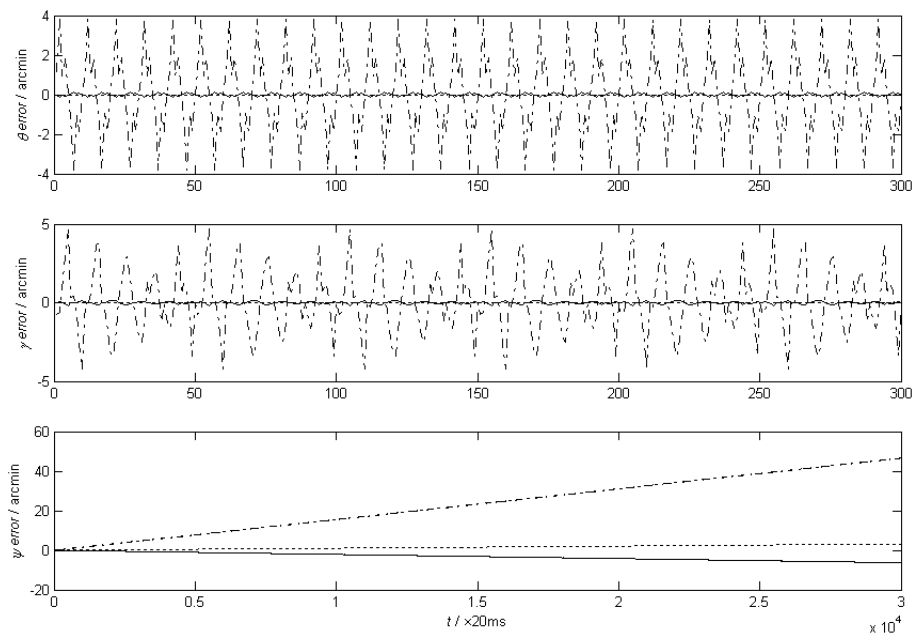


图 6-8 圆锥运动条件下各种算法的姿态和方位解算误差

表 6-1 圆锥运动条件下各种算法的方位漂移误差

组别	陀螺抖动频率 (Hz)			圆锥运动参数		10min 方位漂移误差 (′)					
	X 轴	Y 轴	Z 轴	α (°)	f (Hz)	理想采样	整周期采样	常值外推修正	线性外推修正	抛物线外推修正	线性+抛物线
1	370	359	408	10	1	0.1	18.4	-104.7	-0.3	0.3	0.1
2	370	359	408	1	3	0.2	0.6	-30.6	-0.4	0.9	0.3
3	370	340	408	1	5	3.2	24.2	-115.8	-4.5	10.0	2.7
4	380	359	408	1	5	3.2	17.4	-131.5	-5.2	11.1	3.0
5	370	340	400	1	3	0.2	2.1	-27.7	-0.4	0.9	0.2
6	370	340	400	1	5	3.2	24.3	-115.1	-4.5	9.9	2.7

从表 6-1 中可以得出以下结论：①当圆锥运动的锥角或频率较大时，整周期采样的方位漂移误差比理想采样的大得多；②激光陀螺抖动频率对整周期采样方位漂移误差有影响，如可通过对比组 3、组 4 和组 6 或者对比组 2 和组 5 中的整周期采样仿真结果；③整周期采样修正算法中，常值外推起不到改善作用，反而使方位漂移误差增大，线性外推修正性能较好，抛物线外推修正有改善作用，但效果不如线性外推的好；④从另外一个角度看，可以认为线性外推和抛物线外推修正效果是相当的，因为在每组仿真结果中这两者距理想采样漂移误差的距离大致相等，读者可以自行计算作比较，这表明了线性外推修正不够充分，而抛物线

外推修正却有点“过了头”，若取两者之平均构造线性+抛物线外推修正，仿真结果如表 6-1 中最后一列所示，它和理想采样的漂移误差非常接近。

6.5 本章小结

经过本章分析指出，在圆锥运动条件下，激光陀螺整周期采样是引起姿态算法漂移误差的重要原因。姿态算法漂移误差速率与圆锥运动幅值、频率、激光陀螺机械抖动频率、导航计算机采样周期、所选择的等效旋转矢量算法等因素有关。如果圆锥运动条件恶劣，则整周期采样时姿态算法漂移误差将急剧增大，远远大于理想采样条件下的算法漂移误差。因此，在 LSINS 角运动平缓时可以采用整周期采样方式，而在角运动比较剧烈时就有必要改进激光陀螺采样方式。本章提出了对激光陀螺整周期采样进行改进的方法，详细推导了线性外推修正的算法公式。仿真结果表明，当姿态更新采用等效旋转矢量二子样算法时，利用线性+抛物线外推修正的效果非常显著，它能有效抑制整周期采样造成的姿态算法漂移误差，达到与理想采样的漂移误差非常接近的程度。因为，在等效旋转矢量二子样算法中，相当于采用线性模型近似捷联惯组的角运动，文中使用线性+抛物线外推修正效果好，而在等效旋转矢量三子样算法中是采用抛物线模型近似角运动，所以，可以预见利用抛物线+三次曲线外推修正也能在三子样算法中取得好的补偿效果。同理，上述思路还可推广到其它子样数的整周期采样修正算法中去。最后指出的是，整周期采样修正算法的计算机采样最高频率受到限制，即它必须小于捷联惯组中三个激光陀螺抖动频率的最小者，否则外推修正算法会失效。

第七章 经典圆锥误差补偿精度估计的再探讨

7.1 引言

捷联惯导系统(SINS)中陀螺与运载体固联,直接感测运载体的角运动,在恶劣角动态环境下,捷联姿态算法中可能存在严重的圆锥误差。自1971年Bortz提出了等效旋转矢量微分方程后,国内外学者对圆锥误差补偿算法进行了大量的研究^[54-59]。经典圆锥误差补偿的基本思路是,比较标准圆锥运动条件下的理论更新等效旋转矢量与由陀螺角增量采样构造的计算更新等效旋转矢量,求得等效旋转矢量误差,再以该误差的非周期项最小为准则,确定角增量构造算法的各项系数,如Jordan的二子样法、Miller的三子样算法和Lee的四子样算法。在总结以往算法的基础上,Jiang提出了以角增量构造圆锥误差补偿量的通用表达式,Park提出了在各种子样下求解圆锥误差补偿系数和剩余误差估计的通用公式。至此,可以说圆锥误差补偿算法得到了比较完满的解决,遗留的只不过是一些边角问题的修补了,就国内来说,相关的研究文献虽然众多,但是其中不少均处于跟踪性研究或重复性研究的水平。尔后,针对某些特定的应用场合,仍不断有研究者提出重新确定优化系数的方法,如陀螺采样为角速率或角速率+角增量、激光捷联惯导系统中激光陀螺高频采样后需经数字低通滤波处理、广义圆锥运动环境等情形^[60-63]。

在实际应用中,Park圆锥误差补偿的剩余误差估计公式存在不足之处,其原因主要有两点:①在经典圆锥误差补偿系数推导过程中,必须假设圆锥运动的半锥角为小量,但本质上并不能认为它是无穷小量(例如可将 $1^\circ \approx 0.017\text{rad}$ 量级当作小量,但是某些情况下不一定能把它看成是无穷小量),因此,特别是在半锥角较大且子样数较高时,剩余误差估计公式偏差严重;②经典圆锥误差中,以等效旋转矢量误差的非周期项最小为准则确定补偿系数,而仿真表明,若等效旋转矢量误差的周期项存在误差也会引起姿态计算常值漂移误差。由于未考虑到上述两个因素影响,而仅以Park的剩余误差估计公式作为衡量标准,致使多数文献研究结果都高估了它们的圆锥误差补偿算法精度,这些精度高估了的算法,其理论价值和实际工程应用价值极其有限。本章所要研究的就是,利用近似推导和仿真的方法阐明前述两个因素对圆锥误差补偿算法中剩余误差估计的影响,并为剩余误差估计提供一种新的更精确的参考公式。

7.2 经典圆锥运动的描述

假设动坐标系 b 系相对参考坐标系 r 系绕 $o_r x_r$ 轴作圆锥运动，半锥角为 α ，锥运动频率为 f ($\Omega = 2\pi f$)，并且在初始 $t = t_0 = 0$ 时刻 b 系相对于 r 系的变化四元数为

$$\mathbf{Q}(t_0) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & 0 & \sin \frac{\alpha}{2} \cos \Omega t_0 & \sin \frac{\alpha}{2} \sin \Omega t_0 \end{bmatrix}^T \quad (7-1)$$

而 b 系在 $t > 0$ 时刻的运动参数可分别用等效旋转矢量 $\Phi(t)$ 、变换四元数 $\mathbf{Q}(t)$ 或角速度矢量 $\omega(t)$ 描述为

$$\Phi(t) = [0 \quad \alpha \cos \Omega t \quad \alpha \sin \Omega t]^T \quad (7-2)$$

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & 0 & \sin \frac{\alpha}{2} \cos \Omega t & \sin \frac{\alpha}{2} \sin \Omega t \end{bmatrix}^T \quad (7-3)$$

$$\omega(t) = \begin{bmatrix} -2\Omega \sin^2 \frac{\alpha}{2} & -\Omega \sin \alpha \sin \Omega t & \Omega \sin \alpha \cos \Omega t \end{bmatrix}^T \quad (7-4)$$

上述三个公式是同一运动的三种不同数学表达方式，它们之间存在一定的关系。注意到角速度 (7-4) 式中 x 轴分量存在一个常值小量，而文献[57, 59]将该分量视为 0，是不正确的。

记 b 系从 t_{m-1} 时刻至 t_m 时刻 ($t_m - t_{m-1} = T$) 相对变化的等效旋转矢量为 $\Phi(t_{m-1}, t_m)$ ，与其对应的变换四元数为 $\mathbf{q}(t_{m-1}, t_m)$ 。由于等效旋转矢量一般不满足简单的可加性或可乘性运算法则，即一般有 $\Phi(t_m) \neq \Phi(t_{m-1}) + \Phi(t_{m-1}, t_m)$ 和 $\Phi(t_m) \neq \Phi(t_{m-1}) \times \Phi(t_{m-1}, t_m)$ ，因此，在圆锥运动条件下，欲求得 $\Phi(t_{m-1}, t_m)$ ，只能先通过求得 $\mathbf{q}(t_{m-1}, t_m)$ 。其步骤如下：

首先，由变换四元数更新方程

$$\mathbf{Q}(t_m) = \mathbf{Q}(t_{m-1})\mathbf{q}(t_{m-1}, t_m) \quad (7-5)$$

解得

$$\mathbf{q}(t_{m-1}, t_m) = \mathbf{Q}^*(t_{m-1})\mathbf{Q}(t_m) = \begin{bmatrix} 1 - 2(\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\lambda_N}{2})^2 \\ -\sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \lambda_N \\ -\sin \alpha \sin \frac{\lambda_N}{2} \sin[\Omega(t_{m-1} + \frac{T}{2})] \\ \sin \alpha \sin \frac{\lambda_N}{2} \cos[\Omega(t_{m-1} + \frac{T}{2})] \end{bmatrix} \quad (7-6)$$

其中记 $\lambda_N = \Omega T$ ，再根据变换四元数 $\mathbf{q}(t_{m-1}, t_m)$ 与等效旋转矢量 $\Phi(t_{m-1}, t_m)$ 之间的关系 (7-7) 式：

$$\mathbf{q}(t_{m-1}, t_m) = \cos \frac{\Phi_T}{2} + \Phi(t_{m-1}, t_m) \frac{\sin(\Phi_T / 2)}{\Phi_T} \quad (7-7)$$

其中 $\Phi_T = |\Phi(t_{m-1}, t_m)|$ ，并且记 $\xi = \frac{\Phi_T}{\sin(\Phi_T / 2)}$ 。比较 (7-6) 式和 (7-7) 式的

后三分量（矢量部分）得更新等效旋转矢量的理论值

$$\Phi(t_{m-1}, t_m) = \xi \cdot \begin{bmatrix} -\sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \lambda_N \\ -\sin \alpha \sin \frac{\lambda_N}{2} \sin[\Omega(t_{m-1} + \frac{T}{2})] \\ \sin \alpha \sin \frac{\lambda_N}{2} \cos[\Omega(t_{m-1} + \frac{T}{2})] \end{bmatrix} \quad (7-8)$$

如果将 (7-8) 式两边同时取模再平方，整理可得

$$\sin^2 \frac{\Phi_T}{2} = \sin^4 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \lambda_N + \sin^2 \alpha \sin^2 \frac{\lambda_N}{2} \quad (7-9)$$

假设从 t_{m-1} 时刻至 t_m 时刻对圆锥运动进行了 N 次等间隔角增量采样，采样周期 $h = T/N$ ，并记 $\lambda = \Omega h$ （即 $\lambda_N = N\lambda$ ），则有各子样角增量 $\Delta\theta_m(i)$ 和总角增量 $\Delta\theta_m$ 表达式

$$\Delta\theta_m(i) = \int_{t_{m-1}+(i-1)h}^{t_{m-1}+ih} \omega(t)dt = \begin{bmatrix} -2\sin^2 \frac{\alpha}{2} \lambda \\ -2\sin \alpha \sin \frac{\lambda}{2} \sin[\Omega(t_{m-1} + ih - \frac{h}{2})] \\ 2\sin \alpha \sin \frac{\lambda}{2} \cos[\Omega(t_{m-1} + ih - \frac{h}{2})] \end{bmatrix} \quad (7-10)$$

$$\Delta\theta_m = \int_{t_{m-1}}^{t_m} \omega(t)dt = \sum_{i=1}^N \Delta\theta_m(i) = \begin{bmatrix} -2\sin^2 \frac{\alpha}{2} \lambda_N \\ -2\sin \alpha \sin \frac{\lambda_N}{2} \sin[\Omega(t_{m-1} + \frac{T}{2})] \\ 2\sin \alpha \sin \frac{\lambda_N}{2} \cos[\Omega(t_{m-1} + \frac{T}{2})] \end{bmatrix} \quad (7-11)$$

其中 $i=1,2,3\dots N$ 。上述分析中，(7-8) 式表示理想圆锥运动在 $t_m - t_{m-1} = T$ 时间段内的等效旋转矢量理论值，而 (7-11) 式表示期间陀螺输出的总角增量，显然，用简单表达式难以准确建立起 (7-8) 式与 (7-11) 式的关系。

7.3 圆锥误差补偿算法

这里简要介绍一下 Park 的圆锥误差补偿系数与剩余误差估计通用公式的求

解过程^[57]。

假设半锥角 α 为正值小量, 则在 (7-9) 式中 $\sin^4 \frac{\alpha}{2}$ 与 $\sin^2 \alpha$ 相比是高阶小量, 忽略前者的影响, 近似有 $\sin \frac{\Phi_T}{2} \approx \sqrt{\sin^2 \alpha \sin^2 \frac{\lambda_N}{2}} = \sin \alpha \sin \frac{\lambda_N}{2}$, 再使用泰勒级数展开其中的 $\sin \frac{\Phi_T}{2}$ 和 $\sin \alpha$, 并且只保留一阶项, 近似可得 $\frac{\Phi_T}{2} \approx \alpha \sin \frac{\lambda_N}{2}$, 所以有

$$\frac{\sin(\Phi_T/2)}{\Phi_T/2} \approx \frac{\sin \alpha \sin(\lambda_N/2)}{\alpha \sin(\lambda_N/2)} \approx 1$$

$$\text{即 } \xi = \frac{\Phi_T}{\sin(\Phi_T/2)} \approx 2 \quad (7-12)$$

因此, 更新等效旋转矢量的理论值 (7-8) 式近似为

$$\Phi_m \approx \begin{bmatrix} -2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \lambda_N \\ -2 \sin \alpha \sin \frac{\lambda_N}{2} \sin[\Omega(t_{m-1} + \frac{T}{2})] \\ 2 \sin \alpha \sin \frac{\lambda_N}{2} \cos[\Omega(t_{m-1} + \frac{T}{2})] \end{bmatrix} \quad (7-13)$$

其中简记 $\Phi(t_{m-1}, t_m)$ 为 Φ_m 。比较 (7-11) 式和 (7-13) 式可见, 它们只在 x 轴分量上不同, 如果直接以陀螺总角增量 $\Delta\theta_m$ 代替等效旋转矢量 Φ_m 进行捷联惯导解算, 在每个姿态更新 T 时段内都将产生误差 (即圆锥误差)

$$\delta\Phi_{mx} = \Phi_{mx} - \Delta\theta_{mx} = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} (\lambda_N - \sin \lambda_N) \quad (7-14)$$

经典圆锥误差补偿算法的研究目标就是, 在每个姿态更新周期 T 内进行多次采样 (获得子样 $\Delta\theta_m(i)$), 再利用 $\Delta\theta_m(i)$ 的各种运算组合逼近圆锥误差 $\delta\Phi_{mx}$ 。

首先, 利用泰勒级数展开 $\delta\Phi_{mx}$ 得

$$\delta\Phi_{mx} = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left[\frac{1}{2} (\lambda_N - \sin \lambda_N) \right] = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^{\infty} c_i \lambda_N^{2i+1} \quad (7-15)$$

式中 $c_i = (-1)^{i+1} \cdot \frac{N^{(2i+1)}}{2 \times (2i+1)!}$ 。

其次, 在 Jiang 圆锥误差补偿通用表达式中, 本节仅以单周期多子样圆锥补偿为例, 圆锥误差补偿通式 (即 $\Delta\theta_m(i)$ 的运算组合方式) 为

$$\delta \hat{\Phi}_m = \left[\sum_{i=1}^{N-1} k_{N-i} \Delta \theta_m(i) \right] \times \Delta \theta_m(N) \quad (7-16)$$

其中

$$\Delta \theta_m(i) \times \Delta \theta_m(j) = \begin{bmatrix} 4 \sin^2 \alpha \sin^2 \frac{\lambda}{2} \sin[(i-j)\lambda] \\ -8\lambda \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \sin \frac{\lambda}{2} \sin[\Omega_{t_{m-1}} + (i+j-1)\frac{\lambda}{2}] \sin[(i-j)\frac{\lambda}{2}] \\ 8\lambda \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \sin \frac{\lambda}{2} \cos[\Omega_{t_{m-1}} + (i+j-1)\frac{\lambda}{2}] \sin[(i-j)\frac{\lambda}{2}] \end{bmatrix} \quad (7-17)$$

而 $k_i (i=1,2,3\dots N-1)$ 为待定系数。将 (7-17) 式代入 (7-16) 式，展开并整理，暂且不考虑 y 轴和 z 轴分量，得 $\delta \hat{\Phi}_m$ 的 x 轴分量 $\delta \hat{\Phi}_{mx}$ 为

$$\begin{aligned} \delta \hat{\Phi}_{mx} &= 4 \sin^2 \alpha \sin^2 \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{N-1} k_i \sin(i\lambda) \\ &= 2 \sin^2 \alpha (1 - \cos \lambda) \sum_{i=1}^{N-1} k_i \sin(i\lambda) = \sin^2 \alpha \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N-1} A_{ij} k_i \lambda^{2i+1} \end{aligned} \quad (7-18)$$

其中 $A_{ij} = (-1)^{i+1} \cdot \frac{(j+1)^{2i+1} - 2j^{2i+1} + (j-1)^{2i+1}}{(2i+1)!}$ 。

最后，考虑到 α 为小量，近似有

$$4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \approx \sin^2 \alpha \quad (7-19)$$

在经典圆锥误差中，只考虑等效旋转矢量误差的非周期项，而忽略其它两个分量影响，因此若令 $\delta \Phi_{mx} = \delta \hat{\Phi}_{mx}$ ，则有

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \lambda^{2i+1} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N-1} A_{ij} k_i \lambda^{2i+1} \quad (7-20)$$

在每个 N 子样情形下，令 (7-20) 式中关于 λ 的前 $N-1$ 项对应系数相等，便可解得待定系数 k_i ，当 N 为 1~5 时各系数结果如表 7-1 所示。

表 7-1 圆锥误差补偿算法系数与漂移

子样数 N	k_1	k_2	k_3	k_4	ε_N
1					$1/12 \times \alpha^2 \lambda_N^3$
2	2/3				$1/960 \times \alpha^2 \lambda_N^5$
3	27/20	9/20			$1/204120 \times \alpha^2 \lambda_N^7$
4	214/105	92/105	54/105		$1/82575360 \times \alpha^2 \lambda_N^9$
5	1375/504	650/504	525/504	250/504	$1/54140625000 \times \alpha^2 \lambda_N^{11}$

此外, 设 N 子样提供的有效补偿值 $\delta\hat{\Phi}_{mx}$ 与真实值 $\delta\Phi_{mx}$ 之间的误差为 ε_N , 此即圆锥误差补偿算法的剩余误差, 则 Park 的 ε_N 估计公式为

$$\varepsilon_N = \delta\Phi_{mx} - \delta\hat{\Phi}_{mx} = \frac{N \times N!}{2^{N+1} \prod_{k=1}^{N+1} (2k-1)} \alpha^2 \lambda_N^{2N+1} \quad (7-21)$$

各子样下的 ε_N 估计式亦可参见表 7-1 最后一列。

7.4 传统剩余误差估计的局限性

从上一节圆锥误差补偿算法求解过程中可以看出, 其中作了两点近似或假设, 首先是假设半锥角 α 是小量, 体现在 (7-12) 式和 (7-19) 式; 其次认为 (7-16) 式中各子样叉乘后的 y 和 z 轴分量不会引起姿态更新常值漂移误差。以下详细分析这两因素对经典圆锥误差补偿算法中剩余误差估计的影响, 证明传统剩余误差估计过于理想化了。

7.4.1 半锥角 α 的影响

为了推导方便, 这里除了假设 α 是小量外, 还假设 λ_N 也是小量 (而实际上只要求角增量采样满足采样定理, 即 $\lambda_N = N \cdot \Omega h < N\pi$, 此时 λ_N 不一定是小量), 用泰勒级数展开 (7-9) 式, 保留适当阶次的近似得

$$\left(\frac{\Phi_T}{2}\right)^2 \approx \left(\frac{\alpha}{2}\right)^4 \lambda_N^2 + \left(\alpha - \frac{1}{3!} \alpha^3\right)^2 \left(\frac{\lambda_N}{2}\right)^2 \quad (7-22)$$

展开并整理得

$$\Phi_T^2 \approx 4\alpha^2 \lambda_N^2 \left[\frac{1}{16} \alpha^2 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{6} \alpha^2\right)^2 \right] \approx \alpha^2 \lambda_N^2 \left(1 - \frac{1}{12} \alpha^2\right) \quad (7-23)$$

因此

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\Phi_T}{\sin(\Phi_T/2)} \approx \frac{\Phi_T}{(\Phi_T/2) - 1/3! \times (\Phi_T/2)^3} \\ &\approx 2 \left(1 + \frac{1}{24} \Phi_T^2\right) = 2 \left[1 + \frac{1}{24} \left(1 - \frac{1}{12} \alpha^2\right) \alpha^2 \lambda_N^2\right] \end{aligned} \quad (7-24)$$

不妨退一步假设 (7-20) 式能严格成立, 即在经典圆锥误差补偿算法中当子样数无穷多时, 有

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N-1} A_{ij} k_j \lambda^{(2i+1)} = \frac{1}{2} (\lambda_N - \sin \lambda_N)$$

成立, 现计算如下式定义的误差

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon} &= \delta\Phi_{mx} - \delta\hat{\Phi}_{mx} \\
&= \sin^2 \frac{\alpha}{2} (2\lambda_N - \xi \sin \lambda_N) - \sin^2(\alpha) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N-1} A_{ij} k_j \lambda^{(2i+1)} \\
&= \sin^2 \frac{\alpha}{2} (2\lambda_N - \xi \sin \lambda_N) - \frac{1}{2} \sin^2(\alpha) (\lambda_N - \sin \lambda_N) \\
&= (2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha) (\lambda_N - \sin \lambda_N) - (\xi - 2) \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \lambda_N \\
&= (\frac{1}{4} \cos 2\alpha - \cos \alpha + \frac{3}{4}) (\lambda_N - \sin \lambda_N) - \frac{1}{2} (\xi - 2) (1 - \cos \alpha) \sin \lambda_N
\end{aligned} \tag{7-25}$$

这便是当半锥角 α 为非无穷小量时可能引起的误差，它反映出了经典圆锥补偿算法所无法超越的极限精度。

为了获得误差 $\tilde{\varepsilon}$ 与 α 之间的更为简洁关系式，将 (7-25) 式用泰勒级数展开，并将 (7-24) 式代入，近似得

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}' &\approx (\frac{1}{8} \alpha^4 - \frac{1}{48} \alpha^6 + \dots) (\frac{1}{6} \lambda_N^3 - \frac{1}{120} \lambda_N^5 + \dots) \\
&\quad - \frac{1}{12} \alpha^2 \lambda_N^2 (\frac{1}{4} \alpha^2 - \frac{1}{24} \alpha^4 + \dots) (\lambda_N - \frac{1}{6} \lambda_N^3 + \dots) \\
&\approx \frac{7}{2880} \alpha^4 \lambda_N^5
\end{aligned} \tag{7-26}$$

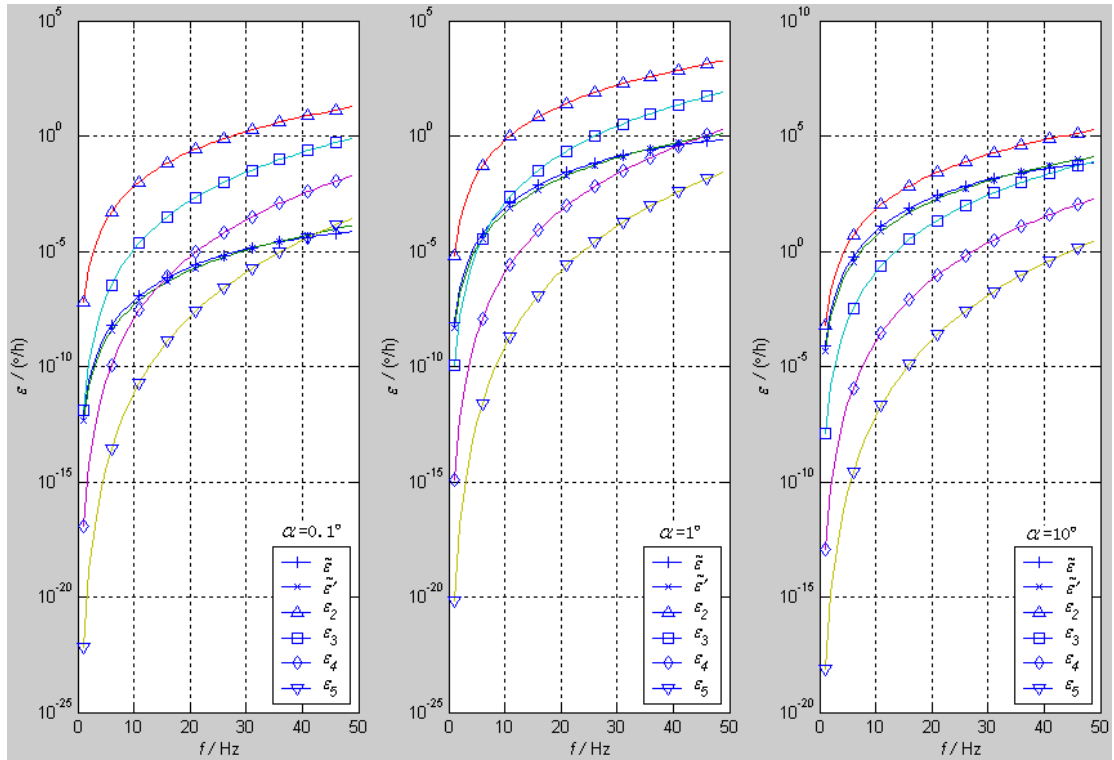


图 7-1 不同半锥角下剩余误差估计曲线

例如, 取圆锥误差补偿周期 $T=0.01\text{s}$, 半锥角 $\alpha=0.1^\circ$ 、 1° 、 10° 三种情况, 当锥运动频率 f 从 1Hz 到 50Hz 时 (虽然推导 (7-24) 式过程中假设了 λ_N 为小量, 但是仿真时将其拓展到了较大值的情形), 各种剩余误差估计曲线如图 7-1 所示, 从图中可以看出 $\tilde{\varepsilon}$ 与 $\tilde{\varepsilon}'$ 比较接近, 表明推导 (7-26) 式的简化过程是合理正确的, 然而特别在子样数比较大并且圆锥频率比较小时, 经典剩余误差估计曲线 ε_N 优于极限精度 $\tilde{\varepsilon}$ 好几个数量级, 从前面分析过程可知, 此时的 ε_N 估计是不准确的, 或者说, 经典剩余误差估计过于理想化了, 它只能在半锥角无穷小时成立, 因而在实际工程中应用价值受到限制。显而易见, 在一定半锥角和圆锥频率条件下由于极限精度的存在, 当极限精度产生限制作用时, 提高圆锥误差补偿精度的唯一途径是缩短圆锥补偿周期, 而不能简单地通过增加子样数实现, 即只能是缩短 T , 而不能在不改变 T 的情况下仅增加子样数 N (或等效于减小采样周期 h)。

7.4.2 等效旋转矢量周期项误差的影响

陀螺总角增量 (7-11) 式中的 $\Delta\theta_m$ 与近似理论等效旋转矢量 (7-13) 式中的 Φ_m 在 y 和 z 轴分量上完全一致。更精确地分析: 从 (7-9) 式知 Φ_T 是半锥角 α 和圆锥误差补偿周期 T 的函数, 或者说 Φ_T 与绝对时间 t_m 无关, 即对于一定的半锥角 α 和圆锥误差补偿周期 T 而言 $\xi = \Phi_T / \sin(\Phi_T / 2)$ 是常值, 因此总角增量 $\Delta\theta_m$ 与理论等效旋转矢量 (7-8) 式中的 $\Phi(t_{m-1}, t_m)$ 在 y 和 z 轴分量上波动幅值相比为固定的 $2/\xi$ 倍, 从 (7-24) 可知该倍数近似为 $1 - \alpha^2 \lambda_N^2 / 24$ 。再进一步, 从子样叉乘 (7-17) 式可以看出, 每个叉乘项在 y 和 z 轴分量上是周期变化的, 其幅值为

$$\left| 8\lambda \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \sin \frac{\lambda}{2} \sin[(i-j)\frac{\lambda}{2}] \right| \approx \left| 8\lambda \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \alpha \frac{\lambda}{2} \sin[(i-j)\frac{\lambda}{2}] \right| \leq 8\lambda \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \alpha \frac{\lambda}{2} = \alpha^3 \lambda^2$$

因此, 定性分析起来, 总角增量 $\Delta\theta_m$ 经过圆锥补偿后, 与理论等效旋转矢量 $\Phi(t_{m-1}, t_m)$ 相比, 计算等效旋转矢量 $\Delta\theta_m + \delta\hat{\Phi}_m$ 在 y 和 z 轴上存在两类周期误差: 一类是固定 $2/\xi$ 倍的周期性误差, 另一类是与圆锥误差补偿 $\delta\hat{\Phi}_m$ 相关的周期性误差, 这时即便不考虑 x 轴误差影响, 上述两类误差共同作用都将在 y 和 z 轴上引起周期性姿态解算误差。以往在研究圆锥误差补偿算法时, 这两类误差被大多数研究者忽略, 若不考虑 y 和 z 轴而只单纯地针对 x 轴进行圆锥误差补偿研究是不够全面的, 至少在宣称的补偿精度非常高时可能是有欠缺的, 特别是在半锥角比较大的情形下。

现令半锥角 $\alpha=10^\circ$ 、锥运动频率 $f=1\text{Hz}$ 、圆锥误差补偿周期 $T=N \times 0.01\text{s}$,

图 7-2 是 y 和 z 轴上引起周期性姿态解算误差结果曲线，其中蓝色实线为采用单子样算法（即不进行圆锥误差补偿）、红色点划线为二子样算法，从图中可以看出，二子样算法比单子样算法在 y 和 z 轴上引起周期性姿态误差更大，且 y 和 z 轴上的误差相位正好相差 90° 。

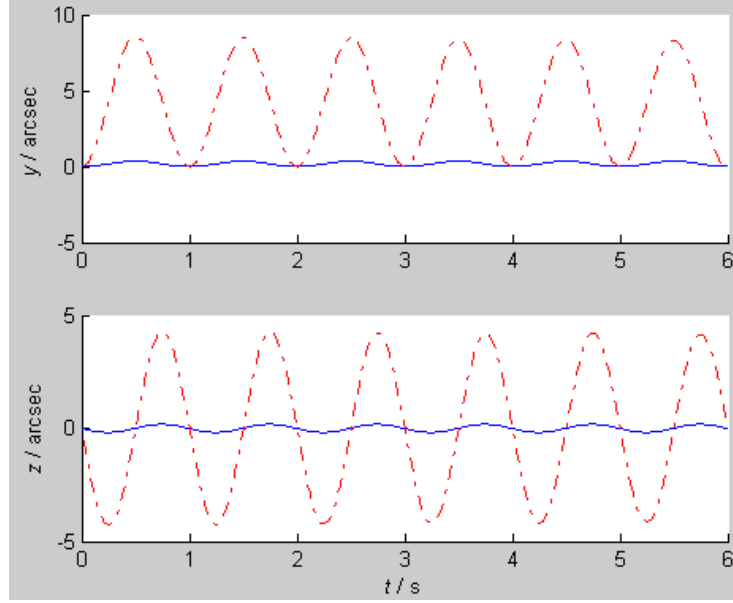


图 7-2 圆锥误差补偿引起 y 和 z 轴姿态误差

更多的仿真发现，圆锥误差补偿除 y 和 z 轴上造成周期性误差外，在 x 轴上还会引起姿态计算常值漂移误差，也就是说，即使 (7-20) 式在 x 轴上对圆锥误差补偿得非常完美， $\Delta\theta_m + \delta\hat{\Phi}_m$ 在 y 轴和 z 轴上的前述两类周期性误差还会在 x 轴上诱发出新的姿态漂移误差。由于在多子样情况下 $\delta\hat{\Phi}_m$ 在 y 轴和 z 轴上准确计算公式的复杂性，想要通过公式推导的方法分析计算等效旋转矢量两类周期性误差对圆锥误差补偿中姿态常值漂移的影响存在很大的困难，因此，本节后续部分只能采用仿真方法来说明其影响。

在一个圆锥补偿周期内，理论的等效旋转矢量为 (7-8) 式中的 $\Phi(t_{m-1}, t_m)$ ，而通过角增量采样进行圆锥误差补偿后的计算等效旋转矢量记为

$$\hat{\Phi}(t_{m-1}, t_m) = \Delta\theta_m + \delta\hat{\Phi}_m \quad (7-27)$$

仿真时对 $\Phi(t_{m-1}, t_m)$ 和 $\hat{\Phi}(t_{m-1}, t_m)$ 的各分量进行拆分和相互重新组合，构造两种新的等效旋转矢量如下

$$\Phi'(t_{m-1}, t_m) = \begin{bmatrix} \Phi_x(t_{m-1}, t_m) \\ \hat{\Phi}_y(t_{m-1}, t_m) \\ \hat{\Phi}_z(t_{m-1}, t_m) \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \hat{\Phi}'(t_{m-1}, t_m) = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_x(t_{m-1}, t_m) \\ \Phi_y(t_{m-1}, t_m) \\ \Phi_z(t_{m-1}, t_m) \end{bmatrix} \quad (7-28)$$

也就是说, $\Phi'(t_{m-1}, t_m)$ 的 x 轴分量是理论值, y 和 z 轴分量是利用圆锥误差补偿方法构造的; 而 $\hat{\Phi}'(t_{m-1}, t_m)$ 的 x 轴分量是利用圆锥误差补偿方法构造的, y 和 z 轴分量是理论值。若按经典圆锥误差补偿估计理论作判断, 以 $\Phi'(t_{m-1}, t_m)$ 进行姿态更新不会在 x 轴产生常值漂移误差, 而 $\hat{\Phi}'(t_{m-1}, t_m)$ 造成的漂移与 $\hat{\Phi}(t_{m-1}, t_m)$ 是相同的。但是, 实际仿真剩余误差曲线如图 7-3 所示, 其中 $T=0.01s$, 半锥角 $\alpha=1^\circ$, 圆锥误差补偿选择为三子样算法, 锥运动频率 f 从 1Hz 到 50Hz 变化, 利用 $\hat{\Phi}(t_{m-1}, t_m)$ 、 $\Phi'(t_{m-1}, t_m)$ 、 $\hat{\Phi}'(t_{m-1}, t_m)$ 进行姿态更新对应的剩余误差曲线分别为 $\hat{\varepsilon}_3$ 、 ε_3' 和 $\hat{\varepsilon}_3'$ 。从图 7-3 中可以看出, 当圆锥频率比较小时, 即使等效旋转矢量 $\Phi'(t_{m-1}, t_m)$ 的 x 轴设成理论值, 其剩余误差 ε_3' 与真实仿真误差 $\hat{\varepsilon}_3$ 一致, 但比经典估计值 ε_3 大得多, 反而是 $\hat{\Phi}'(t_{m-1}, t_m)$ 对应的误差 $\hat{\varepsilon}_3'$ 与 ε_3 更为接近。当锥运动频率增大时, ε_3' 误差相对较小, 表明 $\Phi'(t_{m-1}, t_m)$ 对高频段的适应性好。仿真结果充分说明了等效旋转矢量周期项误差对圆锥误差补偿是有影响的。

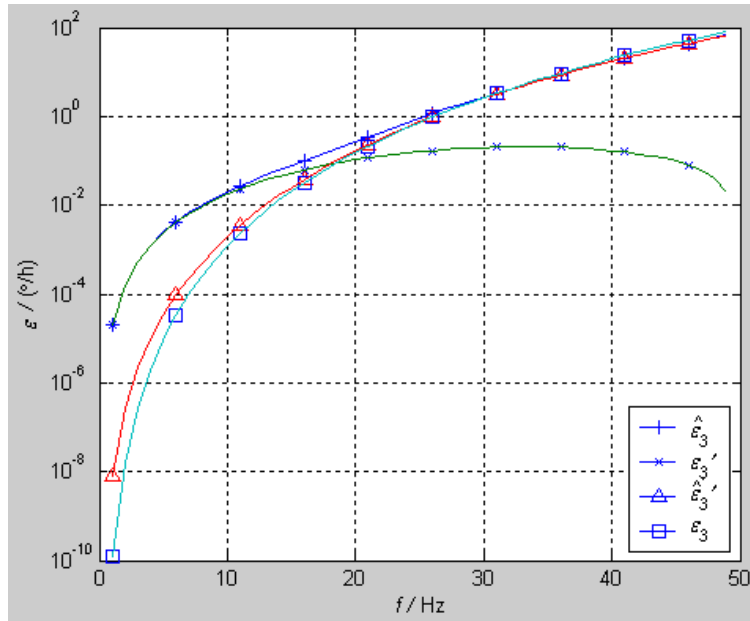


图 7-3 不同等效旋转矢量构造方式下剩余误差估计曲线

此外, 如文献[64]所述, 当 $f=1\text{Hz}$ 、 $h=10\text{ms}$, 而半锥角 α 和子样数 N 取不同值时, 进行一系列的圆锥漂移误差仿真和理论漂移误差计算, 结果摘录如表 7-2 所示。从表中可以看出, 只有当半锥角 α 很小时, 高子样数的仿真误差和理论误差才比较接近, 而当 α 较大时, 高子样数的仿真误差和理论误差之间相差倍数很大, 甚至在仿真误差中出现高子样补偿效果不如低子样的现象 (特别关注表中的粗斜体数据)。

表 7-2 一分钟圆锥漂移误差仿真和理论计算（单位：”）

α		1 子样	2 子样	3 子样	4 子样	5 子样
1”	仿真误差	6.013e-7	4.745e-10	4.016e-13	3.522e-16	9.558e-19
	理论误差	6.012e-7	4.747e-10	4.013e-13	3.523e-16	3.161e-19
1’	仿真误差	2.164e-3	1.708e-6	1.444e-9	1.612e-12	1.623e-12
	理论误差	2.164e-3	1.709e-6	1.445e-9	1.268e-12	1.138e-15
1°	仿真误差	7.790	6.148e-3	4.596e-6	4.480e-6	2.103e-5
	理论误差	7.792	6.152e-3	5.205e-6	4.566e-9	4.097e-12
10°	仿真误差	771.242	0.596	-5.455e-3	4.416e-2	2.075e-2
	理论误差	779.272	0.615	5.205e-4	4.566e-7	4.097e-10

7.5 本章小结

在经典圆锥误差补偿算法中，以等效旋转矢量误差的非周期项最小为准则确定补偿系数。本章进一步考虑了半锥角非无限小量的影响，提出了一种新的圆锥漂移剩余误差估计参考公式。仿真结果表明，等效旋转矢量误差的周期项也影响圆锥漂移误差的估计。本章的研究显示了传统的剩余误差估计公式过于理想化，随着子样数和半锥角的增大估计偏差越大，应当慎用。事实上，在工程应用中研究过高的算法精度意义不大，天文观测表明，太阳绕银河系中心的转动角速率量级约为 0.005 角秒/年 $\approx 1.6\times 10^{-10}$ °/h，因此若选择太阳系为准惯性坐标系则意味着捷联算法精度不必高于 10^{-10} °/h 量级。此外，只有高精度的陀螺仪才需要高精度的捷联姿态算法与之匹配，实际系统中恶劣的角运动环境往往对高精度陀螺造成很大负面影响，作者认为构建平台惯导系统反而比捷联系统性价比更高，前者能有效隔离角运动的不利影响，充分发挥陀螺的高精度性能优势，相比而言平，实体平台结构的复杂性在整个系统中就不显突出了，目前，世界上实用的最高精度惯导系统/稳定平台无一例外的都采用平台系统结构。利用对偶性原理，可将圆锥误差补偿研究成果推广至划船误差补偿；同理可知，经典的划船误差算法研究中也存在精度高估的问题。

第八章 总结

在博士后进站之初，作者曾拟定了三个研究方向，即：①自主水下航行器导航定位系统研究、②陆用车辆自主定位定向系统研究和③捷联惯导系统快速初始对准方法研究。其中①的研究任务是：与国内某厂合作研制和开发一套光纤捷联惯导系统，构建捷联惯导/多普勒测速仪/GPS 组合导航系统，研制工程原理样机，并进行一定的水下航行试验，为将来的远程自主水下航行器导航技术项目预研打下基础。由于种种原因（主要是硬件系统经验欠缺和对研制困难认识不足），合作研制光纤捷联惯导系统的目标被搁浅，作者转而将主要精力集中在捷联惯导系统快速初始对准方法方面的研究，并借助于西安航天电子时代仪器公司十六所的激光捷联惯导系统进行了一系列的跑车试验，并取得令人满意的效果。遗憾的是，由于博士后工作期间时间有限和没有合适的机会，未能在湖上或海上验证捷联惯导系统动基座初始对准算法。

起初在合作研制光纤捷联惯导系统时，将 0.3° 的方位精度作为系统设计的一个重要指标，由厂方出资采购、加工和装配，而我方重点为设计、技术指导与软件开发。厂方在调研论证时从资金方面考虑希望使用 $0.1^\circ/\text{h}$ 量级的光纤陀螺来实现，至少是先开发一套原形样机，而我方认为至少需要精度水平在 $0.03^\circ/\text{h}$ 的陀螺。从该项目在论证阶段就夭折中，作者有以下一些感想。从经济上或性价比上说，希望以较低的器件精度获得较高的系统导航精度是没错的，它至少反映了算法工作者应当加强测试和算法研究，进行器件精度补偿和算法改进，提高系统的整体性能。目前，在国内基于微机械制造和光学陀螺的捷联惯导系统正处于研制起步阶段，进入门槛相对较低，市场机会众多，竞争也相当激烈，都认为这是一个新兴惯性技术产业重新洗牌和难得的介入机遇，但是，有些单位，尤其是新开展研制的单位，其硬件研制和软件设计结合得不够紧密，甚至是相互割裂的。有些硬件研制人员也许对运用即使是最新的集成数字电路也了如指掌，很容易就可以组装出一套能够正常工作（有陀螺和加速度计信号输出）的系统，便认为达到了惯导系统硬件研制的目的，剩余的就是软件算法的工作了，如果在系统中装配了高精度的惯性器件，理所当然的认为它也应当具备高精度的导航效果，实际上这些工作是远远不够的。而软件设计人员方面，为了达到高性能的系统导航效果，喜欢提出较高的惯性器件精度指标要求，这无疑

会增加系统的成本，有时还是国内惯性器件现有批量制造水平不能满足的。简言之，似乎存在软件设计人员嫌弃硬件精度不够高而硬件设计人员嫌弃软件算法不够好的情绪。利用高精度的器件研制出高精度的导航系统的要求是理所当然的，而惯性技术研究的一个重要价值和宗旨在于利用精度相对较低的器件能够研制出精度相对较高的导航系统，对于软件研制人员而言，就是要进行必要的测试、利用各种补偿手段和改进算法，提高系统的综合性能指标，提升系统的性价比。

惯性技术是一门涉及机电、光学、数学、力学、控制、计算机和地球物理等学科的尖端技术。惯性技术不只注重于理论研究，而应当是实践与理论并重。近来，每年都会产生大量的与惯性技术相关的研究论文，其理论或仿真结果往往都很漂亮或完美，而现实情况是，大概只有小部分论文的研究成果可以应用于实际，综观国内惯性产品的进展也没有发展到与论文研究相应的应有水平。事实上，认真地撰写研究论文也是一个学习、总结和反省的过程，能把所学的知识、本自认为高明的一些想法或随意的涂鸦再融会贯通或仔细推敲一遍，最终结果不论是否定还是肯定甚至更进一步有所发现，对自己而言都是一种收获和进步，至于论文质量另当别论，或许多数有经验的高水平作者都曾有过练笔的经历。显然，在现实国情下，那些发表的论文有相当一部分是高校师生为完成教学任务量化指标而进行的花裙秀腿般的研究，它对于刚进入该领域的新手来说是很好的参考资料，而对于老手来说是多数是重复性的和无实际应用价值的。也许真正有实力的研究院所或研究人员并不会将其核心有价值的研究成果公诸于众，毕竟这些成果曾经使他们付出了努力和代价，还期望依靠它来保持行业竞争优势，换个角度看，国外在高新惯性技术领域对我国采取的也是技术封锁和垄断的措施，反过来看，高校师生最是无私了，愿意与大家共同分享他们的研究成果和成就感。因此，最新发表的研究论文不一定代表了行业最新的研究成果，也许它们对技术垄断者来说已非常陈旧了，公布只不过是一个秘密被披露罢了，但从行业发展角度看，只有大众掌握了才能更快推动研究事业的共同进步。由于大型和高精度惯性设备昂贵，对于绝大多数从事惯性技术研究的研究生来说一般很难有机会接触到，只得闭门造车，以假想的误差传播规律模型进行最优滤波估计，目标是复现假想的误差，其实到这一步只能算是准备工作，离实际应用还有一定的距离，在惯性技术试验阶段还有大量的工作要做。与理论和仿真研究遍地开花相比，试验研究领域更加的未被充分开发，也许其中更容易有新发现和出新研究成果，毕竟实际系统不会总按事先人为假设的规律运行，有时使用简单的处理方法比理论分析的所谓最优算法更加有效。如果

有更多的研究人员参与到实际系统试验中，必定会带来更多更好的解决问题点子，更加快速地提升我国惯性技术应用水平。

例如，作者在第二章一种新的捷联惯导系统初始对准算法研究中，起先使用里程计输出直接差分来计算载车加速度，发现试验结果中有的对准误差比较大，经仔细分析发现是里程计测量噪声太大造成的，后来使用罗经水平对准方法先计算准确载车速度，才使对准精度问题得到较好的解决。再如，在某次作激光捷联惯导系统纯惯性导航试验时，无意中将系统绕方位快速转动 180° ，惊奇发现系统静态导航速度误差突变很大，深入研究之后取得了第五章关于内杆臂效应的分析与补偿的研究结果。还有，在某型号激光捷联惯导系统研制中，用户对姿态角速率输出精度要求比较高，但该系统中激光陀螺采样采用整周期方式，结果促成了第六章整周期采样修正的研究。总之，实际中问题的出现是件好事，便会迫使人们想方设法去解决具体问题，从而产生新的思路和带来新的发现，这往往是仅仅通过仿真手段所不能想到和遇到的。重大难题常人自是难以问津，但对于普通研究人员来说，缺乏的不是解决问题的能力（只是时间长短而已），而是发现新问题的机会和眼光。有人说过，做学问可划分为三个层次，从低级到高级它们依次是：一、解决他人提出的问题，二、自己发现问题并解决它，三、找出问题让别人去解决。在理论和仿真研究比比皆是和似乎难以插足的现状中，开展试验研究对当前惯性产品性能的提高更具实际意义。

每当作者发现新的问题，在为解决问题而苦苦思索时，觉得生活和工作是充实的，但当问题解决了而又没有新的问题到来时，脑子里便感到空落落的，此时觉得自己的技术和能力并没有多大进步——也就那么一丁点。或许，这种循环的过程就是一种不断的进步吧！

以上是作者在博士后研究工作期间和报告写作过程中的一些感想，如有不对，或对于研究报告中的错误之处，望同行专家读者不吝批评指正。

参考文献

- [1] 秦永元. 惯性导航[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [2] 万德钧, 房建成. 惯性导航初始对准[M]. 南京: 东南大学出版社, 1998.
- [3] 董绪荣, 张守信, 华仲春. GPS/INS 组合导航定位及其应用[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1998.
- [4] 杨亚非, 谭久彬, 邓正隆. 惯导系统初始对准技术综述[J]. 中国惯性技术学报, 2002, 10(2): 68-72.
- [5] 朱绍箕. 惯导系统动基座对准技术评述[J]. 战术导弹控制技术, 2004, 3: 46-49.
- [6] 陈令刚, 刘建业, 孙永荣, 等. 微小型捷联惯导系统解析式对准方法研究[J]. 航天控制, 2005, 23(4): 9-12.
- [7] 严恭敏, 秦永元. 车载激光捷联惯导系统双位置对准研究[J]. 弹箭与制导学报, 2005, 25(3): 478-480.
- [8] Yu Jia-cheng, Chen Jia-bin, et al. Multi-position observability analysis of strapdown inertial navigation system[J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 2004, 24(2): 150-153.
- [9] Jiang Y F. Error analysis of analytic coarse alignment methods[J]. IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems. 1998, 34(1): 334-337.
- [10] 刘旭, 张其善, 杨东凯. 一种用于 GPS/DR 组合定位的非线性滤波算法[J]. 北京航空航天大学学报, 2007, 33(3): 184-187.
- [11] 王丹力, 张洪钺. 惯导系统初始对准的非线性滤波算法[J]. 中国惯性技术学报, 1999, 7(3): 17-21.
- [12] 李东明. 捷联式惯导系统初始对准方法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学博士学位论文, 2006.
- [13] 魏春岭. 非线性滤波与神经网络在导航系统中的应用研究[D]. 北京: 北京航空航天大学博士学位论文, 2001.
- [14] 刘占荣, 刘全. 自行武器系统的定位定向方法探讨[J]. 情报指挥控制系统与仿真技术. 2003, 1: 33-36.
- [15] 张韶华. 地炮火控系统的现状及发展概况[J]. 火力与指挥控制, 2000, 25(2): 8-14.
- [16] Napolitano F, Gaiffe T, Cottreau Y, et al. PHINS—the first high performances inertial navigation system based on fiber optic gyroscopes[C]. 9th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, 2002, 296-304.
- [17] iXSea Ltd, PHINS_UG_Part1_Intro_MU-PHINS-002-C. pdf, [EB/DK], 2004, 12.
- [18] iXSea Ltd, Octans III UG Part 1 Introduction MU-OCTIII-002-A. pdf [EB/DK], 2004, 7.
- [19] 秦永元, 严恭敏, 顾冬晴, 等. 摇摆基座上基于 g 信息的捷联惯导粗对准研究[J]. 西北工业大学学报, 2005, 23(5): 681-684.
- [20] 练军想, 吴文启, 吴美平, 等. 车载 SINS 行进间初始对准方法[J]. 中国惯性技术学报,

- 2007, 15(2):155-159.
- [21] 王进. 捷联惯导系统罗经对准方法研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学硕士学位论文, 2005.
- [22] 严恭敏, 秦永元. 车载导航系统动态高精度初始对准技术[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 28(9): 1404-1407.
- [23] 程向红, 郑梅. 捷联惯导系统初始对准中 Kalman 参数优化方法[J]. 中国惯性技术学报, 2006, 14(4):12-17.
- [24] Miao Ling-juan, Shen Jun, Liu Wei, et al. Initial alignment technique for SINS of vehicles in the moving state[J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 2002, 11(3):234-239.
- [25] GJB 1723-93. 舰船陀螺罗经通用规范[S].
- [26] 卢鸿谦, 贺杰, 黄显林, 等. 单天线 GPS/加速度计组合测姿方法研究[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2006, 27(6):854-858.
- [27] Wei Chun-ling, Zhang Hong-yue. SINS in-flight alignment using quaternion error models[J]. Chinese Journal of Aerodynamics, 2001, 14(3):166-170.
- [28] Dmitriyev S P, Stepanov O A, Shepel S V. Nonlinear filtering methods application in INS alignment[J]. IEEE Trans. On Aerospace and Electronic Systems, 1997, 33(1):260-271.
- [29] Yu M J, Park H W, Jeon C B. Equivalent nonlinear error models of strapdown inertial navigation system. AIAA-97-3563, 581-587.
- [30] Wu Y X, Hu X P, Wu M P, et al. Strapdown inertial navigation using dual quaternion algebra: error analysis[J]. IEEE Trans. On Aerospace and Electronic Systems, 2006, 42(1):259-266.
- [31] Hong H S, Li J G, Park C G. In-flight alignment of SDINS under large initial heading error. AIAA-2001-4183.
- [32] Julier S J, Uhlmann J K, Durrant-Whyte H F. A new approach for filtering nonlinear systems [C], Proc. Am. Contr. Conf., Seattle, WA. 1995:1628-1632.
- [33] Julier S J, Uhlmann J K. Unscented filtering and nonlinear estimation [J], Proc. Of the IEEE Aerospace and Electronic Systems, 2004, 92(3):401-422.
- [34] 周凤歧, 孙东, 周军. 基于非线性滤波技术的多航天器编队飞行相对导航[J]. 宇航学报, 2005, 26(2):212-216.
- [35] 潘泉, 杨峰, 叶亮, 等. 一类非线性滤波器—UKF 综述[J]. 控制与决策, 2005, 20(5):481-490.
- [36] 张树侠, 孙静. 捷联式惯性导航系统[M]. 北京: 国防工业出版社, 1992.
- [37] 江红, 张炎华, 赵忠华. 捷联惯性导航系统传递对准的杆臂效应分析[J]. 中国造船, 2006, 47(4):71-76.
- [38] Hong S, Lee M H, Kwon S H, et al. A car test for the estimation of GPS/INS alignment errors[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2004, 5(3):208-218.
- [39] 徐晓苏, 万德钧. 舰载捷联惯性系统中杆臂效应误差的研究[J]. 东南大学学报, 1994, 24(2):122-126.

- [40] 严恭敏. 车载自主定位定向系统研究[D]. 西安: 西北工业大学博士论文, 2006.
- [41] 张天光, 王秀萍, 王丽霞, 等译 (David H. Titterton, John L. Weston 著). 捷联惯性导航技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 2007.
- [42] GJB 2406-95. 惯性大地测量系统通用规范[S].
- [43] 王世伟, 李新纯, 李群. 捷联惯导系统动态速度误差补偿研究[J]. 战术导弹控制技术, 2006, 4(55):63-65.
- [44] 王可东, 顾启泰. 环形激光陀螺仪机械抖动系统的进展[J]. 导航, 2000(1):17-24.
- [45] WANG Ke-dong, GU Qi-tai. Optimization of dither amplitude and frequency of RLG[C]. Proceeding of IEEE Position Location and Navigation on Symposium. 2002, 277-282.
- [46] 杨海军, 滕云鹤, 郭美凤, 等. 环形激光陀螺仪的机械抖动控制及信号读出的研究[J]. 清华大学学报(自然科学版), 1998, 38(11):33-35.
- [47] 王宇. 机抖激光陀螺捷联惯导系统的初步探索[D]. 长沙: 国防科技大学博士学位论文, 2005.
- [48] 张岩, 李廷志, 罗兵. 基于 FPGA 的抖动偏频激光陀螺高精度信号解调[J]. 计算机测量与控制, 2006, 14(7):950-952.
- [49] 刘宗玉, 陈明, 王玮, 等. 抖动偏频激光陀螺中的解调及实现技术[J]. 测控技术, 2004, 23(9):67-69.
- [50] Mark J G, Tazartes D A. Tuning of coning algorithms to gyro data frequency response characteristics [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2001, 24(4):641-647.
- [51] 吴文启, 庾洲慧, 江明明. 激光陀螺机械抖动偏频对等效转动矢量姿态计算的影响[J]. 航空学报, 2006, 27(1):71-76.
- [52] 潘献飞, 吴文启, 吴美平. 考虑机抖激光陀螺信号滤波特性的圆锥算法修正[J]. 中国惯性技术学报, 2007, 15(3):259-264.
- [53] 潘献飞, 吴文启, 吴美平, 等. 一种对固定频率运动优化的圆锥算法[J]. 中国惯性技术学报, 2008, 16(1):20-23.
- [54] Bortz J E. A new mathematical formulation for strap-down inertial navigation [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1971, 7(1):61-66.
- [55] Miller R B. A new strapdown attitude algorithm [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1983, 6(4):287-291.
- [56] Jiang Y F, Lin Y P. Improved strap-down coning algorithm [J]. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, 1992, 28(2):484-490.
- [57] Park C G, Kim K J, Lee J G, et al. Formalized approach to obtaining optimal coefficients for coning algorithms [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1999, 22(1):165-168.
- [58] Ignagni M B. Efficient class of optimized coning compensation algorithms [J], Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1996, 16(2):424-429.
- [59] 王养柱, 崔中兴. 捷联惯导系统圆锥补偿算法优化设计[J]. 中国惯性技术学报, 2000, 8(1):7-10.
- [60] 曾庆化, 刘建业, 赵伟. 激光捷联惯导系统角增量输入姿态算法[J]. 南京航空航天大学

-
- 学学报, 2007, 39(2):143-148.
- [61] 祝燕华, 刘建业, 曾庆化, 等. 等效旋转矢量系数优化的参数解析法[J]. 中国惯性技术学报, 2008, 16(1):49-53.
- [62] 魏小莹, 林玉荣, 邓正隆. 光纤陀螺捷联姿态算法的改进研究[J]. 中国惯性技术学报, 2005, 13(2):70-74.
- [63] 黄昊, 邓正隆. 旋转矢量航姿算法的一种新的表达式[J]. 宇航学报, 2001, 22(3):92-98.
- [64] 严恭敏. 基于Matlab的捷联惯导算法设计及仿真[EB/OL]. <http://www.paper.edu.cn>, 2008, 9.

攻读博士学位期间发表的论文

1. 严恭敏, 秦永元, 杨波. 车载航位推算系统误差补偿技术研究[J]. 西北工业大学学报, 2006, 24(1):26-30. (EI:06239925486)
2. 秦永元, 严恭敏, 顾冬晴, 等. 摇摆基座上基于 g 信息的捷联惯导粗对准研究[J]. 西北工业大学学报, 2005, 23(5):681-684. (EI:06029637363)
3. 严恭敏, 秦永元. 车载激光捷联惯导系统双位置对准研究[J]. 弹箭与制导学报, 2005, 25(3):478-480.
4. 严恭敏, 秦永元. 车载激光陀螺 SINS/DR 导航系统研究[J]. 弹箭与制导学报, 2005, 25(4):20-23.
5. 严恭敏, 秦永元. 捷联惯组中陀螺组合标定方法研究[J]. 弹箭与制导学报, 2005, 25(4):872-875.
6. 严恭敏, 秦永元. 国外炮射增程制导弹药技术的研究概况[C]. 2005 惯性技术学术交流会, 贵州, 贵阳, 2005, 8.
7. Yan Gong-min, Qin Yong-yuan. Novel approach to in-flight alignment of micro-mechanical SINS/GPS with heading uncertainty [J]. Chinese Journal of Sensors and Actuators , 2007, 20(1):237-241.
8. 严恭敏, 秦永元, 马建萍. 车载导航系统动态高精度初始对准技术[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 28(9):1404-1407. (EI:064710258772)
9. 严恭敏, 秦永元. 激光捷联惯组的双轴位置转台标定仿真[J]. 中国惯性技术学报, 2007, 15(1):123-127.
10. 严恭敏, 秦永元. 惯导/里程仪组合导航系统算法研究[J]. 计算机测量与控制, 2006, 14(8):1087-1089.
11. 严恭敏, 秦永元. 捷联惯导系统静基座初始对准精度分析及仿真[J]. 计算机仿真, 2006, 23(10):36-40.
12. 王悦勇, 严恭敏. 一种车载自主定位模式及考核方法研究[J]. 中国惯性技术学报, 2006, 13(3):82-88.
13. 马建萍, 严恭敏, 王保卫. OpenGL 在雷达图像实时显示中的应用[J]. 航空计算技术, 2005, 35(4):72-74.
14. 顾冬晴, 秦永元, 严恭敏, 等. 基于多元回归模型的捷联惯性测量组件标定技术[J]. 测控技术, 2005, 23(11):74-76.

15. 杨波,秦永元,严恭敏. 列车组合导航系统研究与仿真[J]. 传感技术学报, 2007, 20(1):242-246.

博士后在站期间发表的论文

1. 严恭敏, 秦永元, 徐德民, 等. 运动状态下捷联惯导系统初始对准方法研究[C]. 2007 惯性技术学术交流会, 云南, 丽江, 2007, 7. (优秀论文二等奖)
2. 严恭敏, 严卫生, 徐德民. 晃动干扰基座下捷联惯导系统初始对准技术与试验研究[C]. 2007 年鱼雷制导技术研讨会论文集, 陕西, 西安, 2007, 10: 154-161.
3. 严恭敏, 严卫生, 徐德民, 等. 抖动偏频激光陀螺整周期采样对捷联惯导姿态解算的影响[J]. 传感技术学报, 2007, 20(10):2268-2271.
4. 严恭敏, 秦永元, 严卫生, 等. 基于双轴位置转台的激光捷联惯组标定方法[C]. 2007 年惯性仪表与元件交流会, 浙江, 宁波, 2007, 11:85-92.
5. 严恭敏, 严卫生, 徐德民, 等. 纬度未知条件下捷联惯导系统初始对准分析[J]. 航天控制, 2008, 26(2):31-34.
6. 严恭敏, 严卫生, 徐德民. 联惯性测量组件中内杆臂效应分析与补偿[J]. 中国惯性技术学报, 2008, 16(2):148-153.
7. 严恭敏, 严卫生, 徐德民, 等. 激光陀螺捷联惯导系统中整周期采样的修正研究[J]. 传感技术学报, 2008, 21(6):998-1001.
8. 严恭敏, 严卫生, 徐德民. 逆向导航算法及其在捷联罗经动基座初始对准中的应用[C]. 第 27 届中国控制会议, 云南, 昆明, 2008, 7, 16-18. Vol. 5: 724-729. (EI:084011616343)
9. 严恭敏, 严卫生, 徐德民. 简化 UKF 滤波在 SINS 大失准角初始对准中的应用[J]. 中国惯性技术学报, 2008, 16(3):253-264.
10. 严恭敏, 严卫生, 徐德民. 经典圆锥误差补偿算法中剩余误差估计的局限性研究[J]. 中国惯性技术学报, 2008, 16(4):379-385.
11. 严恭敏, 秦永元, 严卫生, 等. 捷联惯导系统快速罗经初始对准方法研究[C]. 第六届惯性技术学术年会, 浙江, 宁波, 2008, 11:1-7. (优秀论文二等奖)
12. Changshan Zhao, Yongyuan Qin, Gongmin Yan. On-the-move alignment for strap-down inertial navigation system[C]. ICIA 2008:1428-1432. (EI: 084411662958)

13. Pengxiang Yang, Yongyuan Qin, Gongmin Yan. Local feedback compensation method for INS/GPS/OD land navigation system[C]. ICIA 2008:1422-1427. (EI:084411662957)
14. 周琪, 秦永元, 严恭敏, 等. 激光捷联惯性组件精确标定方法研究[J]. 测控技术, 2008, 27(9):95-98.
15. 严恭敏, 秦永元, 卫育新, 等. 一种适用于捷联惯导系统动基座初始对准的新算法[J]. 系统工程与电子技术, 已录用.
16. 严恭敏, 严卫生, 徐德民, 等. 捷联惯组与炮管之间安装误差角的标定方法[J]. 火力与指挥控制, 已录用.
17. 严恭敏, 严卫生, 徐德民. 一种在较大初始数学平台误差角下提高AUV导航精度的新方法[J]. 鱼雷技术, 已录用.
18. 严恭敏, 严卫生, 徐德民. 基于欧拉平台误差角的 SINS 非线性误差模型研究[J]. 西北工业大学学报, 已录用.

博士后在站期间主持和参加的科研项目

1. 第四十二批博士后科学基金资助金 (20070420215);
2. 水下信息处理与控制国家级重点实验室基金 (9140C230206070C2306);
3. 某型号地空导弹战车定位定向组合导航软件设计;
4. CZ-2D 运载火箭冗余捷联惯导系统导航算法软件设计;
5. “动中通”车载激光捷联惯导/GPS 组合快速动基座初始对准软件设计;
6. 某预研型号空空导弹挠性捷联惯导系统传递对准软件设计。

博士后在站期间获得的奖励

1. 2007 年 12 月, 国防科学技术进步奖二等奖 (2007GFBJ-2228-3);
2. 2007 年 12 月, 第四十二批博士后科学基金资助金 (20070420215)。

个人简介

严恭敏（1977.9—），男，福建建瓯人。2000 年 7 月毕业于西北工业大学自动控制系统测控技术与仪器专业，获工学学士学位；2004 年 3 月毕业于西北工业大学自动化学院，获检测技术与自动化装置工学硕士学位；2006 年 9 月毕业于西北工业大学自动化学院，获导航、制导与控制专业工学博士学位；2006 年 11 月—2008 年 11 月在西北工业大学航海学院兵器科学与技术博士后流动站工作，目前主要从事陆用定位定向系统、水下航行器自主导航技术与组合导航系统理论研究。

通信地址： 陕西省西安市西北工业大学长安校区 891 信箱（自动化学院 905 教研室）

邮编： 710129

E-mail: yangongmin@163.com , yangongmin@sina.com

致 谢

值此报告完成之际，回想起这两年博士后研究工作期间充实而且大有收获的时光，我衷心感谢在工作过程中支持和帮助过我的合作导师、老师、同事、家人以及朋友们！

首先，感谢合作导师徐德民院士。感谢徐老师的亲切关怀和悉心指导，他渊博的学术知识、严谨的工作作风以及为教学和国防科学事业献身的精神和高度的敬业责任感，都使我受益匪浅，并将成为我今后不断进取的永恒动力。

感谢系主任严卫生教授在研究工作期间的指导，教研室宽松的工作环境和严老师的不断鼓励，使我能够投入更多的时间和精力并深入地从事自己感兴趣的课题研究。

感谢我攻读硕士和博士学位期间的导师秦永元教授，有幸在博士后工作期间学术上依然能得到秦老师的悉心指导和大力支持。

感谢教研室的李俊教授、张福斌副教授和张立川博士，还有西安航天时代电子仪器公司第十六研究所的万彦辉副所长、卫育新主任、李汉舟高工和谢波高工，报告中的许多试验都是在他们的支持和协助下才得以完成的。

感谢教研室季小尹、梁庆卫、毛昭勇、曹永辉和高剑等老师，和他们共同渡过愉快而又短暂的两年时光。

感谢我的农民父母哥嫂对我学习和工作的支持，从我上大学到研究生再到博士后工作的长达十二年间，一家人一直过着清贫但是非常充实的生活。这两年中，还特别感谢我贤惠的妻子在生活上和工作上的支持。

最后，向所有给过我帮助和关心的人们致以深深的谢意！